Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Introduction à la Topologie
Mme. Hanachi Adalet

CORRIGÉ DE L'EXAMEN FINAL DE TOPOLOGIE
2ÈME ANNÉE LICENCE MATHS

Questions de cours. (7pts). Vrai ou faux sur (0.25 pt) et la justification sur (0.75 pt).

1- Soit E un espace topologique et D un ensemble dense dans E c-àd $\overline{D}=E$, alors on a
  a- Vrai car $Int(E\setminus D)=E\setminus\overline{D}=E\setminus E=\emptyset$.
  b- Vrai, car $\overline{D}\subset\overline{F}=F$, mais $\overline{D}=E$ donc $F=E$.

2- Soient (E,d) un espace métrique, f,g deux applications continues sur E et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors on a
  a- Faux, car $A=f^{-1}(]-\infty,\lambda])$ et l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.
  b- Faux, car $B=f^{-1}(]\lambda,\infty[)$ et l'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert.
  c- Vrai car $C=(f-g)^{-1}(\{0\})$, $f-g$ est une application continue et et l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.

3- a- Vrai, A est un fermé et borné dans$\mathbb{R}$.
  b- Vrai. B est un produit de deux compacts.

Exercice 1 (6.5 pts)
Soit $E=]0,\infty[$. Pour tout x et y dans E, on pose

$$\delta(x,y)=|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}|$$

1- Montrons que δ est bien une distance sur E. Notons que δ est une application de EXE dans $\mathbb{R}^+$, il suffit démontrer que δ satisfait les conditions suivantes : la définition sur(1 pt)
  a- $\forall x,y\in E,\delta(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$.
  b- $\forall x,y\in E,\delta(x,y)=\delta(y,x)$.
  c- $\forall x,y,z\in E,\delta(x,z)\leq\delta(x,y)+\delta((y,z)$.
  Chaque condition sur (0.5 pt)
  • **a**– Soient x et y deux éléments quelconques dans E, on a $\delta(x,y)=0\Leftrightarrow|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}|=0\Leftrightarrow x=y$.
  • **b**– Soient x et y deux éléments quelconques dans E, on a $\delta(x,y)=|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}|=|\frac{1}{y}-\frac{1}{x}|=\delta(y,x)$.
  • **c**– Soient x,y et z trois éléments quelconques dans E, on a
  $\delta(x,z)=|\frac{1}{x}-\frac{1}{z}|=|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}|\leq|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}|+|\frac{1}{y}-\frac{1}{z}|=\delta(x,y)+\delta((y,z)$.

2- Montrons que δ et d la distance usuelle sont topologiquement équivalentes, en utilisant les suites.
  Chaque implication sur (1 pt)
  Soit $(x_n)_n$ une suite convergente vers x pour δ, donc on a
  $\lim_{n\to\infty}\delta(x_n,x)=0\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}|\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x}|=0\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}|x_n-x|=0=\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)$,
  ce qui donne (x_n) converge vers x pour d.
  • L'inverse supposons que (x_n) converge vers x pour d et montrons que (x_n) converge vers x pour δ. En effet grâce à la continuité de la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ sur E et (x_n) converge vers x, on obtient $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$. D'où la convergence de la suite pour δ.

3- Montrons que (E,δ) n'est pas complet c-à-d qu'il existe une suite de Cauchy dans E n'est pas convergente dans E. Si on prend la suite $x_n=n$, remarquons que (x_n) est de Cauchy dans (E,δ) car la suite $y_n=\frac{1}{n}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R},d)$, mais n'est pas convergente dans E pour δ.
  Sur (2 pt) la définition sur (1 pt) et l'exemple sur (1 pt).

Exercice 2 (6.5 pts) Dans $\mathbb{R}$, on pose

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & si \quad x = y; \\ |x| + |y| & sinon \end{cases}$$

1- Montrons que d est une distance sur $\mathbb{R}$. Pour cela il faut vérifier les trois conditions précédentes $a-, b-$ et $c-$.

- **a**$-$ Est une conséquence immédiate de la définition de d.(0.5 pt)
- **b**$-$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$. On distingue deux cas

  1- Si $x = y$, on a $d(x,y) = 0 = d(y,x)$.(0.25 pt)

  2- Si $x \neq y$, on a $d(x,y) = |x| + |y| = |y| + |x| = d(y,x)$. (0.25 pt)
- **c**$-$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$. On distingue les cas suivants :

  1- Si $x = y = z$, on a $d(x,z) = 0 = 0 + 0 = d(x,y) + d(y,z)$. (0.25 pt)

  2- Si $x = y \neq z$, dans ce cas $d(x,z) = |x| + |z| = 0 + |y| + |z| = d(x,y) + d(y,z)$. (0.25 pt)

  3- Si $x = z \neq y$, on a $d(x,z) = 0 \leq |x| + |y| + |y| + |z| = d(x,y) + d(y,z)$. (0.25 pt)

  4- Si $y = z \neq x$, on a $d(x,z) = |x| + |z| = |x| + |y| + 0 = d(x,y) + d(y,z)$. (0.25 pt)

  5- Si les trois points sont distincts, on a $d(x,z) = |x| + |z| \leq |x| + |y| + |y| + |z| = d(x,y) + d(y,z)$. (0.25 pt)

2- Les boules ouvertes (resp fermée) $B(x,r)$ (resp $B_f(x,r)$) avec $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. On a
$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}, d(x,y) < r\} = \{y \in \mathbb{R}, |x| + |y| < r\} = \{y \in \mathbb{R}, |y| < r - |x|\}$, la définition (1 pt)
(resp $B_f(x,r) = \{y \in \mathbb{R}, |y| \leq r - |x|\}$, la définition (1 pt) .
Donc

- Si $r \leq |x|$, on trouve $B(x,r) = \emptyset$, (resp $B_f(x,r) = \{x\}$) (0.5 pt) sur chaque boule.
- Si $r > |x|$, on trouve $B(x,r) =]-r+|x|, r-|x|[$, (resp $B_f(x,r) = [-r+|x|, r-|x|]$.) (0.5 pt) sur chaque boule.