**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

*Ministère de l'enseignement supérieur et la recherche scientifique*

*Université de batna 02*

*Faculté des Mathématiques et Informatique*

*Département des Mathématiques*

**Support de cours**

Option : 2 ème année Licence Mathématique Académique

# Introduction à la topologie

Hanachi Adalet

**Année Universitaire : 2019 - 2020**

# Table des matières

# Rappels et notions de bases

Le but de ce chapitre et de rappeler des notions qui seront fondamentales dans la suite du cours.

## Applications

**Définition 0.0.1.** *Soient E et F deux ensembles non vides. On dit que $f$ est une application de E dans $f$ et on note*

$$f : E \to F$$

*ssi pour tout $x \in E$ , il existe un et un seul $y \in F$ tel que $y = f(x)$. On dit que $y$ est l'image de $x$ par $f$ et que $x$ est un antécédent $y$ par $f$.*

**Remarque 0.0.1.** *Il peut y avoir plusieurs antécédents, seul l'image est unique.*

### 0.0.1 Injectivité, Surjectivité et bijectivité

**Définition 0.0.2.** *Soient E et F deux ensembles non vides et $f$ une application de E dans F*

1 *On dit que $f$ est injective ssi tout élément de F a au plus un antécédent par $f$ càd*

$$(f \text{ est injective}) \Leftrightarrow \left(\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'\right).$$

2 *On dit que $f$ est surjective si tout élément de F a au moins un antécédent par $f$ càd*

$$(f \text{ est surjective}) \Leftrightarrow (\forall y \in F, \exists x \in E \,/\, y = f(x))$$

3 *Soit A une partie de E et B une partie de F . On note*

$$f(A) = \{f(x)/x \in A\}$$

*et*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \,/ f(x) \in B\}$$

4 *On dit que $f$ est bijective ssi $f$ est injective et surjective càd*

$$\forall y \in F, \exists! x \in E \,/\, y = f(x)$$

**Proposition 0.0.1.** *Soient E et F deux ensembles non vides et $f$ une application de E dans F, $f$ est bijective ssi il existe une application $g$ de F dans E telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$.*

**Définition 0.0.3.** *L'unique application $g$ vérifiant la propriété précédente est appelée bijection réciproque (l'inverse de $f$ )et notée $f^{-1}$.*

**Remarque 0.0.2.** *L'ensemble $f^{-1}(B)$ existe toujours même si $f$ n'est bijective.*

## 0.1 Relation d'ordre

**Définition 0.1.1.** *Soit $R$ une relation sur $E$ . On dit que $R$ est une relation d'ordre ssi*

— $\forall x \in E \quad xRx$ *réflexivité.*

— $\forall x, y \in E$ *si* $xRy$ *et* $yRx \Longrightarrow x = y$ *antisymétrie*

— $\forall x, y, z \in E$ *si* $\left\{ \begin{array}{l} xRy \\ yRz \end{array} \right. \Longrightarrow xRz$ *transitivité*

On dit que $(E, R) = (E, \leq)$ est un ensemble ordonné

**Exemple 0.1.1.** **1** $(\mathbb{R}, \leq)$ *est un ensemble ordonné.*

**2** $(\mathbb{R}, <)$ *n'est pas*

**3** $(\mathcal{P}(E), \subset)$ *est un ensemble ordonné.*

**Définition 0.1.2.** *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. On dit que la relation $\leq$ est totale ssi*

$$\forall x, y \in E \Longrightarrow x \leq y \text{ ou } y \leq x$$

*on dit que $(E, \leq)$ est totalement ordonné.*

**Exemple 0.1.2.**

**1** $(\mathbb{R}, \leq)$ *est totalement ordonné.*

**2** *Si $E = \{0, 1\}, (\mathcal{P}(E), \subset)$ n'est pas totalement ordonné car $\{0\} \subsetneq \{1\}$ et $\{1\} \subsetneq \{0\}$.*

### 0.1.1 Majorant, Minorant, Plus grand élément , Plus petit élément, élément maximal et élément minimal

**Définition 0.1.3.**

**1** *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. $A$ une partie de $E$ et $\underline{a \in E}$. On dit que $a$ est majorant (resp minorant) de $A$ ssi $\forall x \in A \Longrightarrow x \leq a$ (resp $x \geq a$)*

**2** *On dit que $A$ est majorée (resp minorée) s'il existe un majorant (resp minorant) de $A$ .*

**3** *On dit que $a$ est plus grand (resp plus petit) élément de $A$ si $\underline{a \in A}$ et $a$ est majorant (resp minorant) de $A$ et on note $a = \max A$ (resp $a = \min A$).*

**Proposition 0.1.1.** *Si $A$ possède un plus grand élément (resp plus petit élément), alors il est unique.*

**Définition 0.1.4.** *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. et $A$ une partie de $E$ . On dit que $a$ est un élément maximal (resp un élément minimal) ssi*

$$\left\{ \begin{array}{c} a \in A \\ \forall x \in A \text{ si } x \geq a \Longrightarrow x = a \ (\text{resp } x \leq a \Longrightarrow x = a\ ) \end{array} \right.$$

**Remarque 0.1.1.** *Quand l'ensemble n'est pas totalement ordonné, parler de plus grand élément n'a pas toujours un sens, ce seront les éléments maximaux qui joueront le rôle de plus grand élément.*

**Exemple 0.1.3.** *On considère l'ensemble $(\mathcal{P}(E), \subset)$ avec $E = \{0, 1\}$ si $A = \{\{0\}, \{1\}\}$. $A$ n'a pas de plus grand élément, mais a deux éléments maximaux $\{0\}$ et $\{1\}$.*

**Proposition 0.1.2.** *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. et $A$ une partie de $E$ . Si $A$ admet un plus grand élément $a$ alors $a$ est un élément maximal et c'est le seul.*

**Proposition 0.1.3.** *Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné. et $A$ une partie de $E$. Si $A$ admet un élément maximal, alors c'est le seul est le plus grand élément de $A$.*

### 0.1.2 Bornes supérieurs et inférieurs

**Définition 0.1.5.** *Soit* $(E, \leq)$ *un ensemble ordonné. et* $A$ *une partie de* $E$ *. on dit que* $M$ *est borne supérieur (resp* $m$ *est borne inférieur) de* $A$ *si le petit majorant (resp le plus grand minorant) de* $A$*.On note* $M = \sup A$ *(resp* $m = \inf A$*).*

**Proposition 0.1.4.** 1 *Si* $A$ *possède une borne supérieur (resp borne inférieur) alors* $A$ *est majorée (resp est minorée).*

2 *Si* $A$ *possède une borne supérieur (resp borne inférieur) ,celle ci est unique.*

3 *Si* $A$ *possède un plus grand élément* $M$ *(resp plus petit élément* $m$*) alors* $M = \sup A$ *(resp* $m = \inf A$).

**Le cas de $\mathbb{R}$**

**Théorème 0.1.1.** *Toute partie non vide majorée (resp minorée) de* $\mathbb{R}$ *admet une borne supérieure (resp une borne inférieure).*

**Théorème 0.1.2.** *Soit* $A \subset \mathbb{R}$ *non vide. Si* $M \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall x \in A \Longrightarrow x \leq M$, *alors* $\sup A$ *existe et* $\sup A \leq M$. *De même* $m \in \mathbb{R}$ *est tel que* $\forall x \in A \Longrightarrow x \geq m$, *alors* $\inf A$ *existe et* $m \leq \inf A$.

**Remarque 0.1.2.** *Si* $(\forall x \in A \Longrightarrow x \prec M \not\Rightarrow) \sup A \prec M$.

**Exemple 0.1.4.** *Si* $A = [0, 1[$ *et* $M = 1$, *on a* $\forall x \in A \Longrightarrow x \prec 1$ *mais* $\sup A = 1$

# Chapitre 1

# Espaces topologiques

## 1.1 Topologie sur un ensemble

**Définition 1.1.1.** *Une topologie sur un ensemble E est une partie $\mathscr{T}$ de $\mathcal{P}(E)$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

1 $\emptyset \in \mathscr{T}, E \in \mathscr{T}$

2 *L'intersection de deux éléments de $\mathscr{T}$ est un élément de $\mathscr{T}$ Càd*

$$\forall A, B \in \mathscr{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{T}$$

3 *La réunion (finie ou infinie )d'une famille d'éléments de $\mathscr{T}$ est un élément de $\mathscr{T}$*

$$\forall (A_i)_{i \in I \subseteq \mathbb{N}} \subset \mathscr{T} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathscr{T}$$

Un espace topologique est le couple $(E, \mathscr{T})$. Les éléments de $\mathscr{T}$ sont appelés les ouverts de $E$.

**Exemple 1.1.1.** 1 *Sur un ensemble E , il existe toujours deux topologies extrêmes la topologie discrète $\mathscr{T}_d = \mathcal{P}(E)$ et la topologie grossière $\mathscr{T}_g = \{\emptyset, E\}$.*

2 *Soit E =$\{a, b\}$, on peut muni E par quatre topologie $\mathscr{T}_g = \{\emptyset, E\}, \mathscr{T}_d = \mathcal{P}(E), \mathscr{T}_1 = \{\emptyset, E, \{a\}\}$ et $\mathscr{T}_2 = \{\emptyset, E, \{b\}\}$.*

4 $E = \mathbb{R}, \mathscr{T}_u = \{A \subseteq \mathbb{R} \forall x \in A, \text{il existe} \quad a, b \in \mathbb{R}/a < x < b \quad \text{et} \quad ]a, b[\subseteq A\}$ *c'est la topologie usuelle sur* $\mathbb{R}$

**Définition 1.1.2.** *Un fermé de $(E, \mathscr{T})$ est une partie de E dont le complémentaire dans E est un ouvert de $(E, \mathscr{T})$*

**Exemple 1.1.2.** 1 *Dans l'exemple 2 les fermés de $\mathscr{T}_1 = \{\emptyset, E, \{a\}\}$ sont $\mathscr{T}_2 = \{\emptyset, E, \{b\}\}$.*

2 *Tout les éléments de la topologie discrète $\mathscr{T}_d$ sont fermés.*

**Remarque 1.1.1.** *On peut définir une topologie sur E à l'aide de ses fermés. En effet . Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$ l'ensemble des fermés d'une topologie sur E. Il faut et il suffit qu'il vérifie les conditions suivantes :*

1 $\emptyset \in \mathcal{F}, E \in \mathcal{F}$.

2 *L'intersection (finie ou infinie )d'une famille d'éléments de $\mathcal{F}$ est un élément de $\mathcal{F}$.*

*3 La réunion de deux éléments de $\mathcal{F}$ est un élément de $\mathcal{F}$.*

La topologie est alors des complémentaires des éléments de $\mathscr{T}$

**Remarque 1.1.2.** *Une intersection quelconque d'ouverts n'est pas toujours ouvert et une réunion quelconque de fermés n'est pas toujours fermé.*

**Exemple 1.1.3.** *Si on prend la topologie usuelle $\mathscr{T}_u$ sur $\mathbb{R}$ on a $\cap_{n\in\mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[=\{0\}$ et $\cup_{n\in\mathbb{N}^*}[\frac{1}{n},1]=]0,1]$.*

**Exercice 1.1.1. Topologie induite**
*Soient $(E,\mathscr{T})$ un espace topologique et $A$ une partie de $E$.*
*- Montrer que l'ensemble*

$$\mathscr{T}_A=\{\mathcal{O}\cap A/\mathcal{O}\in\mathscr{T}\}$$

*est une topologie sur $A$.*

**Exemple 1.1.4.** *Soient $(\mathbb{R},\mathscr{T}_u)$ un espace topologique et $A=[0,2]\subset\mathbb{R}$, on définie la topologie induite par $A$ par :*

$$\mathscr{T}_A=\{\mathcal{O}\cap A/\mathcal{O}\in\mathscr{T}_u\}$$

*On voit que $]-1,1[\cap A=]-1,1[\cap[0,2]=[0,1[$ est un ouvert de $(A,\mathscr{T}_A)$. Si $A=[-1,1[$, on voit que $[0,1[=A\cap[0,3]=[-1,1[\cap[0,3]$ est fermé de $(A,\mathscr{T}_A)$ malgré que $[0,1[$ ni ouvert ni fermé de $(\mathbb{R},\mathscr{T})$*

**Remarque 1.1.3.** *L'exemple précédent montre que, lorsqu'on utilise les adjectifs ouvert et fermé, il faut toujours préciser l'espace topologique de référence.*

### Base topologique

**Définition 1.1.3.** *(Topologie engendrée) Soient $E$ un ensemble et $\mathcal{A}$ un ensemble de partie de $E$ . L'intersection de toutes topologies qui contiennent $\mathcal{A}$ est appelée topologie engendrée par $\mathcal{A}$.*

**Définition 1.1.4.** *(Base topologique) Soit $E$ un ensemble. Une base de topologie sur $E$ est un ensemble de parties de $E$ noté $\mathfrak{B}$ tel que*

*i- La réunion des éléments de $\mathfrak{B}$ est égale à $E$.*

*ii- L'intersection de deux éléments de $\mathfrak{B}$ est une réunion d'éléments de $\mathfrak{B}$.*

Si $\mathfrak{B}$ est une base de topologie sur $E$ qui engendre une topologie $\mathscr{T}$ , on dit que $\mathfrak{B}$ est une base de topologie pour $\mathscr{T}$

**Exemple 1.1.5.** *L'ensemble $\mathfrak{B}=\{[a,b[,(a,b)\in\mathbb{R}^2/a<b\}\cup\{\emptyset\}$ est une base de topologie sur $\mathbb{R}$ et la topologie $\mathscr{T}$ engendrée par $\mathfrak{B}$ est plus fine que la topologie usuelle $\mathscr{T}_u$. En effet $\forall x\in\mathbb{R}$ on a $x\in[x,x+1[$ donc $\mathbb{R}\subset\bigcup_{x\in\mathbb{R}}[x,x+1[$ et $\bigcup_{x\in\mathbb{R}}[x,x+1[\subset\mathbb{R}$ ce qui implique que $\mathbb{R}=\bigcup_{x\in\mathbb{R}}[x,x+1[$ de plus $\forall\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2\in\mathfrak{B}\Longrightarrow\mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2\in\mathfrak{B}$. Pour démontrer que $\mathscr{T}$ la topologie engendrée par $\mathfrak{B}$ est plus fine que $\mathscr{T}_u$ il suffit de trouver un ouvert pour $\mathscr{T}$ qui n'est pas pour $\mathscr{T}_u$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}$. En effet $]x,x+1[=\bigcup_{n\geq N_0}[x+\frac{1}{n},x+1[$ avec $N_0$ assez grand donc tout ouvert pour $\mathscr{T}_u$ est un ouvert pour la topologie engendrée par $\mathfrak{B}$ mais $[x,x+1[$ n'est pas un ouvert pour $\mathscr{T}_u$*

**Proposition 1.1.1.** *Soient $E$ un ensemble, $\mathcal{O}$ une partie de $E$ , $\mathfrak{B}$ une base de topologie sur $E$ et $\mathscr{T}$ la topologie engendrée par $\mathfrak{B}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

**1** $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$

2 *Il existe une famille* $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ *d'éléments de* $\mathfrak{B}$ *telle que* $\mathcal{O} = \underset{i\in I}{\cup}\mathcal{O}_i$ .

3 *Pour tout* $x \in \mathcal{O}$, *il existe* $A \in \mathfrak{B}$ *tq* $x \in A \subset \mathcal{O}$.

**Exercice 1.1.2.** *Montrer que* $\mathfrak{B} = \{]x,y[,(x,y) \in \mathbb{R}^2/x \leq y\}$ *est une base de la topologie usuelle* $\mathcal{T}_u = \{A \subseteq \mathbb{R}/\forall x \in A, \text{ il existe } \quad a,b \in \mathbb{R}; \quad a < x < b \text{ et } \quad ]a,b[\subseteq A\}$ *sur* $\mathbb{R}$

### 1.1.1 Voisinage

**Définition 1.1.5.** *Soit x un point de l'espace topologique* $(E,\mathcal{T})$. *On appelle voisinage de x toute partie V de E contenant un ouvert qui lui-même contient le point x càd*

$$(V\text{voisinage de } x) \Leftrightarrow (\text{il existe} \quad \mathcal{O} \in \mathcal{T} \text{et } x \in \mathcal{O} \subset V)$$

*On note par* $\mathcal{V}(x)$ *l'ensemble des voisinages de x.*

**Exemple 1.1.6.** 1- *Si on prend la topologie usuelle* $\mathcal{T}_u$ *sur* $\mathbb{R}$. *L'ensemble* $A = [a,b]$ *avec* $a \leq b$ *est un voisinage de tout point dans* $]a,b[$.

2- *Si* $E = \{a,b,c\}$ *et* $\mathcal{T} = \{\emptyset,E,\{a\},\{a,c\},\{b\}\}$ *les voisinage du point a sont* $E,\{a\}$ , $\{a,c\}$ *et* $\{a,b\}$

**Proposition 1.1.2.** *Soient* $(E,\mathcal{T})$ *un espace topologique et* $x \in E$, *alors*

*i-* $\forall V_1,V_2 \in \mathcal{V}(x)$ *alors* $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$.

*ii-* *Si* $V \in \mathcal{V}(x)$ *et* $V \subset W$, *alors* $W \in \mathcal{V}(x)$.

**Proposition 1.1.3.** *Soient* $(E,\mathcal{T})$ *un espace topologique et A une partie de E, alors A est ouverte ssi A est voisinage de chacun de ses points càd*

$$(A \text{ une partie ouverte de } E) \Leftrightarrow (\forall x \in A \Longrightarrow A \in \mathcal{V}(x))$$

**Preuve.** *Supposons que A une partie ouverte de E. Soit x un point quelconque de A alors, il existe un ouvert A de E qui contient x alors A voisinage de x . Réciproquement supposons que A est voisinage de chacun ses points ce qui signifie* $\forall x \in A$ *il existe* $\mathcal{O}_x$ *tq* $x \in \mathcal{O}_x \subset A$, *donc* $A \subset \underset{x\in A}{\cup}\mathcal{O}_x \subset A \Longrightarrow A = \underset{x\in A}{\cup}\mathcal{O}_x$ *et* $\underset{x\in A}{\cup}\mathcal{O}_x$ *est un ouvert de E donc A une partie ouverte de E.*

### 1.1.2 Intérieur, adhérence, frontière d'une partie

Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique. Si $A$ une partie de $E$ . On considère l'ensemble $\mathcal{O}(A)$ des ouverts contenus dans $A$. On a $\mathcal{O}(A) \neq \emptyset$ car $\emptyset \in \mathcal{O}(A)$, de plus la réunion $\mathcal{O}$ des éléments de $\mathcal{O}(A)$ est un ouvert de $E$ contenu dans $A$, donc $\mathcal{O} \in \mathcal{O}(A)$ et c'est le plus grand ouvert de $\mathcal{O}(A)$. De même l'ensemble $\mathcal{F}(A)$ des fermés contenant $A$ est non vide car il contient $E$. L'intersection des éléments de $\mathcal{F}(A)$ est un fermé de $E$ et c'est le plus petit élément de $\mathcal{F}(A)$.

**Définition 1.1.6.** *Interieur,adhérence,frontière. Soient* $(E,\mathcal{T})$ *un espace topologique et A une partie de E .*

1- *L'intérieur de A est le plus grand ouvert (pour l'inclusion) contenu dans A, on le note* $A^\circ$ *ou* $int_E A$. *Un point x est dit point d'intérieur de A lorsque* $x \in int_E A$

2- *L'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A, on le note* $\overline{A}$ *ou* $Adh_E A$. *Un point x est dit adhérant à A lorsque* $x \in \overline{A}$ .

3- *La frontière de A, on le note* $Fr(A) = Adh_E A - int_E A$.

**Remarque 1.1.4.** *Noter par définition, on a les équivalences suivantes :*

$$A \text{ ouvert de } E \Leftrightarrow int_E A = A$$

*et*

$$A \text{ fermé de } E \Leftrightarrow \overline{A} = A$$

**Exemple 1.1.7.** 1- *Soit* $E = \{0,1\}$ *et* $\mathscr{T} = \{E, \emptyset, \{0\}\}$ *donc* $\mathcal{F} = \{E, \emptyset, \{1\}\}$. *On a* $Int_E\{0\} = \{0\}$ ,$\overline{\{0\}} = E$ *et* $Fr\{0\} = \{1\}$, $Int_E\{1\} = \emptyset, \overline{\{1\}} = \{1\}$ *et* $Fr\{1\} = \{1\}$.

2- *Si* $E = \mathbb{R}$ *et* $\mathscr{T}$ *la topologie engendrée par les intervalles ouverts . Soit* $A = [0,1[$. *On a* $A^\circ = ]0,1[$ , $\overline{A} = [0,1]$ *et* $Fr(A) = \{0,1\}$.

3- $Int_{\mathbb{R}}\mathbb{Z} = \emptyset$ ,$\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, $Int_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} = \emptyset$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ *et* $Fr(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$

**Exercice 1.1.3.** *Montrer que* $Int_E\{Int_E\{A\}\} = Int_E\{A\}$ *et* ,$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. *Trouver un exemple pour lequel* $\overline{Int_E\{A\}} \neq Int_E\{\overline{A}\}$.

On peut donner une définition équivalente à la définition précédente comme suit :

**Définition 1.1.7.** *Soient* $(E, \mathscr{T})$ *un espace topologique, A une partie de E et* $x \in E$.

1- $x \in Int_E\{A\}$ *ssi s'il existe un ouvert* $\mathcal{O} \in \mathscr{T}$ *tel que* $x \in \mathcal{O} \subset A$.

2- $x \in \overline{A}$ *ssi pour tout ouvert* $\mathcal{O} \in \mathscr{T}$ *contenant x l'intersection de* $\mathcal{O}$ *et A est non vide.*

3- $x \in Fr\{A\}$ *ssi pour tout ouvert* $\mathcal{O} \in \mathscr{T}$ *contenant x les intersections* $\mathcal{O} \cap A$ *et* $\mathcal{O} \cap C_E A$ *sont non vides.*

**Exemple 1.1.8.** *Soient* $E = \{1,2,3,4\}$ ,$\mathscr{T} = \{\emptyset, E, \{1,2\}, \{3,4\}\}$ *et* $A = \{1,2,3\}$ *une partie de E. On a* $1,2 \in Int_E\{A\}$ *car il existe un ouvert* $\mathcal{O} = \{1,2\}$ *tel que* $1,2 \in \{1,2\} \subset A$ *de plus* $\overline{A} = E$ *car* $A \subset \overline{A}$ *et tout les ouverts contenant* 4, *l'intersection de ces voisinages avec A est non vide. Donc* $Fr\{A\} = \overline{A} \setminus Int_E\{A\} = \{3,4\}$.

**Remarque 1.1.5.** *Les notions d'intérieur, d'adhérence et de frontière dépendent de la topologie.*

**Exemple 1.1.9.** *Dans l'exemple* (1.1.4) *on a* $Int_{\mathbb{R}}[0,1[ = ]0,1[$ *et* $Int_A[0,1[ = [0,1[$.

**Proposition 1.1.4.** *Soit A une partie de E et* $B \subset A$. *On a*

$$Int_E B \cap A \subset Int_A B \quad , \quad Adh_A B = Adh_E B \cap A \quad et \quad Fr_A B \subset Fr_E B \cap A$$

**Preuve.** *Exercice*

**Exercice 1.1.4.** *Appliquer ces résultats au exemple* (1.1.4).

**Proposition 1.1.5.** *Soit* $(E, \mathscr{T})$ *un espace topologique.*

i- $x \in Int_E A$ *ssi* $A \in \mathcal{V}(x)$.

ii- $x \in Adh_E A$ *ssi* $\forall V \in \mathcal{V}(x) \Longrightarrow V \cap A \neq \emptyset$.

iii- $x \in Fr_E A$ *ssi* $\forall V \in \mathcal{V}(x) \Longrightarrow V \cap A \neq \emptyset$ *et* $V \cap C_E A \neq \emptyset$.

### 1.1.3 Point isolé, Point d'accumulation.

**Définition 1.1.8.** *Soit $A$ une partie de $E$.*

1- *Un point $x$ est dit isolé dans $A$ s'il existe un voisinage $V$ de $x$ dans $E$ tel que $V \cap A = \{x\}$ càd*

$$(x \text{ un point isolé de } A) \Leftrightarrow (\text{ il existe } V \in \mathcal{V}(x) \text{ tel que } V \cap A = \{x\}).$$

2- *Un point $x$ est dit un point d'accumulation de $A$ si tout voisinage de $x$ dans $E$ rencontre $A$ en un point autre que $x$ c-à-d*

$$(x \text{ un point d'accumulation de } A) \Leftrightarrow (\forall V \in \mathcal{V}(x) \text{on a } V \cap A \backslash \{x\} \neq \emptyset)$$

**Exemple 1.1.10.** **1** *Soit $A = [0,1[\cup\{2\}$. Les points d'accumulations de $A$ sont $[0,1]$ et le point isolé dans $A$ est $2$.*

**2** *Soient $E = \{1,2,3,4\}, \mathscr{T} = \{E, \emptyset, \{1,2\}, \{3,4\}\}$ et $A = \{1,2,3\}$. On détermine les points d'accumulations et les points isolés de $A$ .*

- *Pour $x = 1$, les voisinages de $1$ sont $\mathcal{V}(1) = \{E, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2\}\}$ remarquons que $A\backslash\{1\} \cap V \neq \emptyset \forall V \in \mathcal{V}(1)$. Donc 1 est un point d'accumulation de $A$.*
- *Pour $x = 2$, les voisinages de $2$ sont $\mathcal{V}(2) = \{E, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2\}\}$ remarquons que $A\backslash\{2\} \cap V \neq \emptyset\ \forall V \in \mathcal{V}(2)$. Donc 2 est un point d'accumulation de $A$.*
- *Pour $x = 3$, les voisinages de $3$ sont $\mathcal{V}(3) = \{E, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{3,4\}\}$, remarquons qu'il existe $V = \{3,4\}$ tel que $V \cap A = \{3\}$ Donc 3 est un point isolé de $A$.*
- *Pour $x = 4$, les voisinages de $4$ sont $\mathcal{V}(4) = \{E, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{3,4\}\}$, remarquons que $A\backslash\{4\} = A$ et $V \cap A \neq \emptyset\ \forall V \in \mathcal{V}(4)$. Donc 4est un point d'accumulation de $A$.*

**Proposition 1.1.6.** *Soit $A$ une partie de $E$. On note $Ac(A)$ l'ensemble des points d'accumulation de $A$ et $Is(A)$ l'ensemble des points isolés de $A$. Alors*

$$Ac(A) \cap Is(A) = \emptyset \quad \text{et} \quad Adh(A) = Ac(A) \cup Is(A).$$

*Démonstration.* De la définition de $Ac(A)$, $Is(A)$ et $Adh(A)$ on trouve $Ac(A) \cap Is(A) = \emptyset$ et $Ac(A) \cup Is(A) \subset Adh(A)$. Donc il suffit démontrer que $Adht(A) \subset Ac(A) \cup Is(A)$. Soit $x \in Adh(A)$, on distingue deux cas $x \notin A$ et $x \in A$.

- $x \notin A$, donc tout voisinage de $x$ rencontre $A$ en un point autre que $x$ donc $x \in Ac(A)$.
- Si $x \in A$, deux cas peuvent se produire $x \in Is(A)$, $x \notin Is(A)$ dans ce cas tout voisinage $V$ de $x$ vérifie $A \cap V \supset \{x\}$ donc $A \cap V$ contient un point différent de $x$, donc $x \in Ac(A)$.

□

### 1.1.4 Système fondamental de voisinage

**Définition 1.1.9.** *Soit $A$ une partie de $E$. Un système fondamental de voisinage de $A$ est un ensemble $\mathcal{U}$ de voisinage de $A$ tel que tout voisinage de $A$ contient un élément de $\mathcal{U}$.*

**Exemple 1.1.11.** *Sur $\mathbb{R}$ l'ensemble $\mathcal{U} = \{]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[, n \in \mathbb{N}^*\}$ est système fondamental de voisinage du point $a \in \mathbb{R}$*

### 1.1.5 Partie dense

**Définition 1.1.10.** *Soient A et B deux parties de E. On dit que A est dense dans B lorsque* $B \subset Adh(A)$, *ou ce qui équivalent lorsque tout ouvert de E contenant un point de B rencontre A.*

**Exemple 1.1.12.** *Les ensembles* $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *sont deux parties denses dans* $\mathbb{R}$

**Remarque 1.1.6.**
1- *La densité de A dans B n'exige pas* $A \subset B$.
2- *La densité de A dans B signifie que tout élément de B peut être approché prés que l'on veut par un élément de A.*

**Exemple 1.1.13.**
1- $A = ]0,1[ \cup \{2\}$ *est dense dans* $[0,1]$ *car* $[0,1] \subset Adh(A) = [0,1] \cup \{2\}$.
2- $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$ *car* $\forall a \in \mathbb{R}$ il existe $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ tel que $a = \lim_{n\to\infty} r_n$

### 1.1.6 Espace topologique séparé

**Définition 1.1.11.** *Soit* $(E, \mathscr{T})$ *un espace topologique. On dit que E est séparé si pour tout* $x, y$ *de E tel que* $x \neq y$ *il existe* $V_x$ *voisinage de x et* $V_y$ *voisinage de y tels que* $V_x \cap V_y = \emptyset$.

**Exemple 1.1.14.**
1- $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$ *est séparé. Car* $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *il existe* $V_x$ *et* $V_y$ *tel que* $V_x \cap V_y = \emptyset$.
2- *Un espace topologique discret est toujours séparé.*

**Exercice 1.1.5.** *Montrer que dans un espace séparé tout singleton est fermé.*

### 1.1.7 Densité et séparabilité

**Définition 1.1.12.** *Soient* $(E, \mathscr{T})$ *un espace topologique et A une partie de E . On dit que A est partout dense dans E si* $Adh(A)$ *coïncide avec E.*

**Définition 1.1.13.** *On dit que A est dénombrable s'il existe une bijection f de A dans* $\mathbb{N}$

**Définition 1.1.14.** *Un espace topologique E est dit séparable s'il possède un sous ensemble A dénombrable partout dense dans E.*

**Exemple 1.1.15.** $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_u)$ *est séparable. Car il admet un ensemble* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ *dénombrable et* $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

## 1.2 Continuité et limite

### 1.2.1 Continuité globale et locale

**Définition 1.2.1.** *( continuité globale) Soient* $(E, \mathscr{T}_E)$ *et* $(F, \mathscr{T}_F)$ *deux espaces topologiques. Une application f de E dans F est dite continue sur E si l'image réciproque par f d'un ouvert quelconque de F est un ouvert de E.*

**Exemple 1.2.1.**
1- *Si E est un espace topologique discret, toute application de E dans un espace topologique est continue.*
2- *Si F est un espace grossière c-à-d* $\mathscr{T}_F = \{F, \emptyset\}$ *toute application de E dans F est continue.*
3- *L'application* $t_a : (\mathbb{R}, \mathscr{T}_u) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T})$ *définie par* $x \in \mathbb{R} \mapsto t_a(x) = x + a$ *est continue dans* $\mathbb{R}$

**Proposition 1.2.1.** *Soient* $(E, \mathscr{T}_E)$ *et* $(F, \mathscr{T}_F)$ *deux espaces topologiques. Une application f de E dans F, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1- *$f$ est continue.*

2- *L'image réciproque par $f$ de tout fermé de $F$ est un fermé de $E$.*

3- *Pour toute partie $A$ de $E$ , $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

**Preuve.** (**1** $\Rightarrow$ **3**). *Soient $A \subset E$ et $a \in \overline{A}$. Soit $O$ un ouvert quelconque de $F$ qui contient $f(a)$. $f^{-1}(O)$ est un ouvert de $E$ qui contient $a \in \overline{A} \Rightarrow f^{-1}(O) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow$ il existe $x \in E$ tel que $x \in f^{-1}(O) \cap A \Rightarrow f(x) \in O \cap f(A) \Rightarrow f(a) \in \overline{f(A)}$.*

(**3** $\Rightarrow$ **2**). *Supposons que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ et montrons que $f^{-1}(B)$ est un fermé de $E$ tel que $B$ est un fermé de $F$. Soient $B$ un fermé de $F$ et $A = f^{-1}(B) \Rightarrow f(A) \subset B \Rightarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{B} = B \Rightarrow \overline{A} \subset f^{-1}(B) = A$, donc $A$ est fermé.*

(**2** $\Rightarrow$ **1**). $\forall O \in \mathscr{T}_F \Rightarrow O = C_F B \Rightarrow f^{-1}(O) = f^{-1}(C_F B) = C_E f^{-1}(B) = O_E \in \mathscr{T}_E$

**Proposition 1.2.2.** *Soient $(E, \mathscr{T}_E)$ et $(F, \mathscr{T}_F)$ deux espaces topologiques et $\mathcal{B}_F$ une base pour la topologie $\mathscr{T}_F$. Une application $f$ de $E$ dans $F$ est continue ssi pour tout élément $O$ de $\mathcal{B}_F$ , $f^{-1}(O)$ est un ouvert de $E$*

**Preuve.** *Exercice*

**Définition 1.2.2.** *(Continuité locale). Soient $(E, \mathscr{T}_E)$ , $(F, \mathscr{T}_F)$ deux espaces topologiques et $f$ une application de $E$ dans $F$. Soit $x$ un point de $E$. On dit que $f$ est continue au point $x$ si pour tout voisinage $V$ de $f(x)$, il existe un voisinage $U$ de $x$ tel que $f(U) \subset V$.*

**Remarque 1.2.1.** *$f$ est continue au point $x$ si pour tout voisinage $V$ de $f(x)$ l'ensemble $f^{-1}(V)$ est un voisinage de $x$.*

**Exemple 1.2.2.** *Montrer que la fonction caractéristique de $\mathbb{R}^+$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.*

**Proposition 1.2.3.** *Soient $(E, \mathscr{T}_E)$, $(F, \mathscr{T}_F)$ deux espaces topologiques et $f$ une application de $E$ dans $F$. Soit $x$ un point de $E$. $f$ est continue au point $x$ ssi pour tout élément $V$ d'un système fondamental de voisinages de $f(x)$, l'ensemble $f^{-1}(V)$ est un voisinage de $x$.*

**Définition 1.2.3.** *Soient $(E, \mathscr{T}_E)$ et $(F, \mathscr{T}_F)$ deux espaces topologiques. Une application $f$ de $E$ dans $F$. $f$ est continue sur $E$ ssi elle est continue en tout point de $E$.*

**Remarque 1.2.2.** *En générale, l'image directe d'un ouvert (resp fermé) par une application continue n'est pas ouverte (resp n'est pas fermée)*

**Exemple 1.2.3.** - *Soit l'application $f : ]0,1[ \to \{0\}$ on a $f(]0,1[) = \{0\}$ n'est pas ouverte.*

1. *Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $x \to f(x) = e^x$ on a $f(\mathbb{R}) = ]0, \infty[$ n'est pas fermée.*

**Définition 1.2.4.** **1** *Une application est ouverte ssi l'image directe de tout ouvert par $f$ est un ouvert.*

**2** *Une application est fermée ssi l'image directe de tout fermé par $f$ est un fermé.*

**Exemple 1.2.4.** *Soit $f : (\mathbb{R}, \mathscr{T}_g) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T}_d)$ telle que*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \;\; x < 0 \\ 0 & si \;\; x = 0 \\ 1 & si \;\; x > 0 \end{cases}$$

*$f$ est une application ouverte.*

### 1.2.2 Opérations sur la continuité

**Proposition 1.2.4.** *Soient $(E,\mathcal{T}_E)$, $(F,\mathcal{T}_F)$ et $(G,\mathcal{T}_G)$ trois espaces topologiques. $f$ une application de $E$ dans $F$ et $g$ une application de $F$ dans $G$.*

1- *Si $f$ et $g$ sont continues, alors $g \circ f$ est continue.*

2- *Si $f$ est continue en un point $x$ et $g$ est continue en un point $f(x)$, alors $f \circ g$ est continue au point $x$.*

**Preuve.** *Exercice.*

**Proposition 1.2.5.** *Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique. Si $f$ et $g$ sont deux applications continues de $E$ dans $\mathbb{k}$, $f+g$ et $f \cdot g$ sont aussi continues . L'ensemble $C^0(E,\mathbb{k})$ des applications continues de $E$ dans $\mathbb{k}$ est donc une algèbre pour les lois usuelles.*

**Proposition 1.2.6.** *Soient $(E,\mathcal{T}_E)$ un espace topologique et $(F,\mathcal{T}_F)$ un espace vectoriel topologique séparé. Soit $f$ et $g$ deux applications continues de $E$ dans $F$. Alors on a les assertions suivantes :*

i- *L'ensemble $\{x \in E \;/\; f(x) = g(x)\}$ est fermé de $E$.*

ii- *Si $f$ et $g$ sont égales sur une partie $A$ dense de $E$, alors elles sont égales sur $E$.*

**Preuve.** *Exercice.*

**Remarque 1.2.3.** *La proposition reste valable même si $F$ n'est pas un espace vectoriel.*

### 1.2.3 Limite d'une application en un point

**Définition 1.2.5.** *Soient $(E,\mathcal{T}_E)$ et $(F,\mathcal{T}_F)$ deux espaces topologiques. $A$ une partie de $E$ et $f$ une application de $A$ dans $F$. Soient $a \in A$ et $l \in F$. On dit que $f$ a pour limite $l$ lorsque $x$ tend vers $a$, si pour tout voisinage $V$ de $l$, il existe un voisinage $U$ de $a$ dans $E$ tel que $f(A \cap U) \subset V$. Lorsque la limite existe et est unique on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.*

**Remarque 1.2.4.** *Si l'espace $F$ n'est pas séparé, une fonction peut avoir plusieurs limites en un même point.*

**Proposition 1.2.7.** *Soient $(E,\mathcal{T}_E)$,$(F,\mathcal{T}_F)$ et $(G,\mathcal{T}_G)$ trois espaces topologiques. $A$ une partie de $E$, $B$ une partie de $F$. Soient $f$ une application de $A$ dans $F$ et $g$ une application de $B$ dans $G$ et $a \in \overline{A}$ . On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{y \to l} g(y) = l'$. Alors $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = l'$.*

#### Limite de suites

**Définition 1.2.6.** *Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique et $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow E$, $n \longrightarrow \varphi(n) = x_n$. On dit que $\varphi$ est une suite de points. Soit $x \in E$. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $x$ si $\forall V \in \mathcal{V}(x)$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0 \Longrightarrow x_n \in V$. On écrit*

$$\lim_n x_n = x.$$

**Proposition 1.2.8.** *Soit $f$ une application continue de $E$ dans $F$. Alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x$ alors $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $f(x)$.*

**Preuve.** *Exercice*

### 1.2.4 Topologie produit

**Définition 1.2.7.** *Soient $(E_1,\mathscr{T}_1)$ et $(E_2,\mathscr{T}_2)$ deux espaces topologique. Posons $E = E_1 \times E_2 = \{(x,y)\ /\ x \in E_1 \text{ et } y \in E_2\}$. On définit sur E une famille de sous ensembles $\mathcal{B}_E \subset \mathcal{P}(E)$ par*

$$\mathcal{O} \in \mathcal{B}_E \implies \text{il existe } \mathcal{O}_1 \in \mathscr{T}_1 \text{et} \quad \mathcal{O}_2 \in \mathscr{T}_2 \text{tel que} \quad \mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2.$$

*$\mathcal{O}$ s'appelle un ouvert élémentaire de E et $\mathcal{B}_E$ base des ouverts élémentaires de E.*

**Généralisation à une suite finie d'espaces topologiques**

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1,\mathscr{T}_1),...,(E_N,\mathscr{T}_N)$ des espaces topologiques. On pose $E = \overset{N}{\underset{i=1}{\wedge}} E_i$. On définit sur $E$ la base des ouverts élémentaires $\mathcal{B}_E$ par

$$\mathcal{O} \in \mathcal{B}_E \Longrightarrow \text{il existe} \quad \mathcal{O}_i \in \mathscr{T}_i \quad \text{avec} \quad i \in \{1,..,N\} \text{ tel que} \quad \mathcal{O} = \overset{N}{\underset{i=1}{\wedge}} \mathcal{O}_i.$$

On définit la topologie produit $\mathscr{T} = \overset{N}{\underset{i=1}{\wedge}} \mathscr{T}_i$ par

$$U \in \mathscr{T} \Longleftrightarrow \text{il existe} \quad (\mathcal{O}_j)_{j\in I} \subset \mathcal{B}_E \quad \text{tel que} \quad U = \underset{j\in I}{\cup} \mathcal{O}_j.$$

**Exemple 1.2.5.** *On considère l'espace topologique $(\mathbb{R}^d; \mathscr{T} = \overset{d}{\underset{i=1}{\otimes}} \mathscr{T}_u)$ avec $d \geq 1$*

$$\mathcal{O} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \Longrightarrow \mathcal{O} = ]a_1,b_1[\times]a_2,b_2[\times....\times]a_d,b_d[$$

$$U \in \mathscr{T} \implies \text{il existe} \quad (\mathcal{O}_i)_{i\in I} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \text{ tel que } U = \underset{i\in I}{\cup} \mathcal{O}_i \ \ \textit{avec}\ \mathcal{O}_i = \overset{d}{\underset{j=1}{\wedge}} ]a_{i,j}, b_{i,j}[$$

**Définition 1.2.8.** *Soit $E = \overset{N}{\underset{i=1}{\wedge}} E_i$ . Pour tout $i \in \{1,..,N\}$, on définit l'application*

$$\begin{aligned} \underset{i}{\mathrm{Pr}} \quad &: \quad E \longrightarrow E_i \\ X \quad &= \quad (x_1,x_2,...,x_N) \longrightarrow \underset{i}{\mathrm{Pr}}(X) = x_i \in E_i \end{aligned}$$

$\mathrm{Pr}_i$ *s'appelle la $i^{eme}$ projection de E sur $E_i$.*

**Théorème 1.2.1.** *Soit $(E,\mathscr{T})$ un espace topologique muni de la topologie produit. Alors pour tout $i = 1,...,N$ l'application $\mathrm{Pr}_i$ est continue sur E par rapport à $\mathscr{T}$*

**Preuve.** *Soit $V \in \mathscr{T}_i$ un ouvert quelconque de $E_i$. On montre que $\mathrm{Pr}_i^{-1}(V)$ est un ouvert de . On a*

$$\begin{aligned} \overset{-1}{\underset{i}{\mathrm{Pr}}}(V) \quad &= \quad \{X = (x_1,.,x_i,..,x_N) \in E \ tq\ \underset{i}{\mathrm{Pr}}(X) \in V\} \\ &= \quad \{X = (x_1,.,x_i,..,x_N) \ tq\ x_1 \in E_1, x_2 \in E_2,..,x_i \in V,..,x_N \in E_N\} \\ &= \quad E_1 \times E_2 \times ... \times V \times .. \times E_N \in \mathscr{T} = \overset{N}{\underset{i=1}{\otimes}} \mathscr{T}_i \end{aligned}$$

*Donc* $\mathrm{Pr}_i$ *est continue.*

**Exemple 1.2.6.** *Soient $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$ et $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_u$. On définit l'ensemble de produit $E = E_1 \times E_2$ muni de la topologie produit $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^2} = \mathcal{T}_u \times \mathcal{T}_u$. les projections $\mathrm{Pr}_i$ avec $i = 1,2$ sont définies par*

$$\begin{array}{lcl} \underset{1}{\mathrm{Pr}} & : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \to \underset{1}{\mathrm{Pr}}(x,y) = x \\ \underset{2}{\mathrm{Pr}} & : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \to \underset{2}{\mathrm{Pr}}(x,y) = y \end{array}$$

*sont continues.*

**Proposition 1.2.9.** *Soient $I$ un ensemble quelconque de $\mathbb{N}$ et $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques séparés. Alors l'espace $E = \underset{ii\in I}{\overline{\wedge}} E_i$ muni de la topologie produit est séparé.*

**Preuve.** *Soient $X = (x_i)_{i\in I}$ et $Y = (y_i)_{i\in I}$deux éléments distincts de $E$. Alors il existe $i_0 \in I$ tel que $x_{i_0} \neq y_{i_0}$, comme $E_{i_0}$ est séparé il existe deux voisinages $V$ et $W$ de $x_{i_0}$ et $y_{i_0}$ respectivement. Les ensembles $\mathrm{Pr}_{i_0}^{-1}(V)$ et $\mathrm{Pr}_{i_0}^{-1}(W)$ sont des ouverts élémentaires disjoints de $E$ ils contiennent $X$ et $Y$. Donc $E$ est séparé.*

**Application continue dans un espace produit**

Soient $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique et $(Y_i,\sigma_i)_{1\leq i\leq N}$, $N$ espaces topologiques donnés avec $N \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace topologique produit $Y = \underset{1\leq i\leq N}{\overline{\wedge}} Y_i$ et $\sigma = \underset{1\leq i\leq N}{\otimes} \sigma_i$ . Soit

$$f : (E,\mathcal{T}) \to (Y,\sigma)$$

avec

$$x \to f(x) = (f_1(x), f_2(x),.., f_N(x)) \in Y_1 \times Y_2 \times ... \times Y_N.$$

On définit les applications

$$\begin{array}{lcl} f_j & : & (E,\mathcal{T}) \to (Y_j,\sigma_j) \ \ pour \ \ j = 1,...,N \\ x & \to & f_j(x) \end{array}$$

L'application $f_j$ s'appelle la $j^{eme}$ composante de $f$ .

**Proposition 1.2.10.**

$$(f \text{ est continue sur } \quad E) \Longleftrightarrow (\text{pour tout } \ j = 1,...,N \ , \ f_j \ \text{ est continue sur } \quad E).$$

**Preuve.** $\Rightarrow$? *Supposons que $f$ est continue et montrons que $f_j$ est continue sur $E$ , pour tout $j = 1,...,N$. Remarquons que pour tout $j = 1,...,N$, $f_j = \mathrm{Pr}_j \circ f$ est continue car elle est composée de deux applications continues.*

$\Leftarrow$? *Supposons que $f_j$ est continue sur $E$ , pour tout $j = 1,...,N$, et montrons que $f$ est continue. Soient $x \in E$ tel que $y = f(x) = (f_1(x), f_2(x),.., f_N(x))$ et $V$ un voisinage quelconque de $y = f(x) = (f_1(x), f_2(x),.., f_N(x))$, donc il existe $\mathcal{O} = \underset{1\leq j\leq N}{\overline{\wedge}} \mathcal{O}_j \in \sigma = \underset{1\leq j\leq N}{\otimes} \sigma_j$ tel que $y = (f_1(x), f_2(x),.., f_N(x)) \in \mathcal{O} \subset V$. On a $f_j$ est continue, donc $f_j^{-1}(\mathcal{O}_j) \in \mathcal{T}$ et $f_j^{-1}(\mathcal{O}_j)$ est un voisinage de $x$ dans $E$. On prend $W_x = \underset{1\leq j\leq N}{\cap} f_j^{-1}(\mathcal{O}_j) \subset V$. Donc $f$ est continue.*

# Chapitre 2

# Les espaces métriques

Le but de ce chapitre est l'étude des espace métriques qui sont un cas particulier des espaces topologiques, ils sont constituent des espaces importants dans l'analyse fonctionnelle. À la fin du XIXe siècle, le savant Fréchet (1878-1973) l'a façonné pour répondre aux problèmes posés par le développement de l'analyse fonctionnelle. Ce sont des espaces topologiques avec des propriétés qu'on a l'habitude de manipuler semblable à celles de l'espace $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle.

## 2.1 Distance sur un ensemble

**Définition 2.1.1.** *Soit E un ensemble non vide. On appelle distance toute application*

$$d : E \times E \to \mathbb{R}^+ \quad (x,y) \to d(x,y) \geq 0$$

*telle que*

*1-* $\forall (x,y) \in E^2, \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$

*2-* $\forall (x,y) \in E^2, \quad d(x,y) = d(y,x)$ *symétrie*

*3-* $\forall (x,y,z) \in E^3, \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *inégalité triangulaire.*

$(E;d)$ s'appelle un espace métrique.

**Exemple 2.1.1.** - *On muni $\mathbb{R}$ de la distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$ avec $x,y \in \mathbb{R}$*

- *Soit E un ensemble quelconque non vide. Pour tout $x,y \in E$, on pose*

$$d(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y \end{array} \right. .$$

*$(E;d)$ est un espace métrique, d s'appelle distance discrète sur E.*

- *Soit $E = \mathbb{R}^n$ on définit les distances suivantes : $\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ avec $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$*

$$\begin{array}{rcl} d_1(X,Y) & = & \sum_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| \\ d_2(X,Y) & = & \sqrt{\sum_{1\leq i\leq n} (x_i - y_i)^2} \\ d_\infty(X,Y) & = & \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| \end{array}$$

**Proposition 2.1.1.** *i-* $\forall(x_1,x_2,...,x_n)\in E^n,\ \ d(x_1,x_n)\leq \sum\limits_{1\leq i\leq n-1} d(x_i,x_{i+1})$.

*ii-* $\forall(x,y,z)\in E^3, |d(x,z)-d(z,y)|\leq d(x,y)$ $2^{eme}$ *inégalité triangulaire.*

**Preuve.** *Exercice.*

### 2.1.1 Distance induite

**Définition 2.1.2.** *Soient* $(E,d_E)$ *un espace métrique et* $A$ *une partie de* $E$. *On définit la restriction* $d_A : A\times A\longrightarrow \mathbb{R}^+$ *telle que* $\forall(x,y)\in A^2 \quad d_A(x,y)=d_E(x,y)$. $d_A$ *est la distance induite par* $d_E$ *sur* $A$ *et* $(A,d_A)$ *est un sous espce métrique de* $(E,d_E)$

**Exemple 2.1.2.** *Pour toute partie non vide* $A$ *de* $(\mathbb{R},|.|)$, *on peut définir le sous espace métrique* $(A,d_A)$ *avec* $\forall x,y\in A$ *on a* $d_A(x,y)=|x-y|$.

### 2.1.2 Distance produit

**Définition 2.1.3.** *Soient* $(E_1,d_{E_1})$ *et* $(E_2,d_{E_2})$ *deux espaces métriques. On peut définir des distances sur l'espace produit* $E=E_1\times E_2$ *comme suit :* $\forall X=(x_1,y_1), Y=(x_2,y_2)\in E$

$$\begin{aligned} d_1(X,Y) &= d_{E_1}(x_1,x_2)+d_{E_2}(y_1,y_2)\\ d_2(X,Y) &= \sqrt{d_{E_1}(x_1,x_2)^2+d_{E_2}(y_1,y_2)^2}\\ d_\infty(X,Y) &= \max\{d_{E_1}(x_1,x_2),d_{E_2}(y_1,y_2)\} \end{aligned}$$

**Exemple 2.1.3.** *On définit sur* $\mathbb{R}^2$ *les distances suivantes : soit* $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &= |x_1-x_2|+|y_1-y_2|\\ d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\\ d_\infty(X,Y) &= \max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\} \end{aligned}$$

**Exercice 2.1.1.** *Donner la distance entre* $(1,5)$ *et* $(-2,4)$ *par* $d_1,d_2$ *et* $d_\infty$. *Que concluez-vous ?*

### 2.1.3 Distance entre deux parties et diamètre

**Définition 2.1.4.** *Soient* $A$ *et* $B$ *deux parties non vides d'un espace métrique* $(E,d)$. *On définie la distance entre les deux parties* $A$ *et* $B$ *par*

$$dist(A,B)=\inf_{x\in A;y\in B} d(x,y)$$

**Remarque 2.1.1.** *1- Si* $A=\{a\}$, *on trouve* $d(a,B)=\inf\limits_{y\in B} d(a,y)$.

*2- Si* $A\cap B\neq\emptyset$, *alors* $dist(A,B)=0$.

*3- L'application* $dist:\mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(E)\longrightarrow\mathcal{P}(E)$ *dans* $\mathbb{R}^+$ *n'est pas une distance sur* $\mathcal{P}(E)$.

**Exemple 2.1.4.** *Dans* $(\mathbb{R},d_u)$ *si* $A=[2,4]$ *et* $B=[-1,2]$, *on trouve* $dist(A,B)=0$.

**Diamètre d'un ensemble**

**Définition 2.1.5.** *Le diamètre d'un sous ensemble non vide $A$ de $E$ est le nombre réel positif*

$$diam(A) = \sup_{x,y\in A} d(x,y).$$

On dit que $A$ est borné si $diam(A) < \infty$.

**Exemple 2.1.5.** *1- Dans $(\mathbb{R}, d_u)$, si $A = [-1,4]$, on trouve $diam(A) = 5$.*

*2- Dans $(\mathbb{R}^2, d_2)$, si $A$ est le triangle de sommets $(0,0), (0,1)$ et $(2,0)$. Le diamètre de $A$ est*

$$\begin{aligned} diam(A) &= \sup_{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A} d_2\Big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\Big) \\ &= \sup_{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A} \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \\ &= d_2\Big((0,1),(2,0)\Big) = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

## 2.2 Topologie des espaces métriques

### 2.2.1 Boules - Sphères

**Définition 2.2.1.** *Soient $(E,d)$ un espace métrique et $a \in E$, $r > 0$*

1. *La boule ouverte de centre $a$ et de rayon $r > 0$ est*

$$B(a,r) = \{x \in E \ / d(x,a) < r\}.$$

2. *La boule fermée de centre $a$ et de rayon $r > 0$ est*

$$B_f(a,r) = \{x \in E \ / d(x,a) \le r\}.$$

3. *La sphère de centre $a$ et de rayon $r > 0$ est*

$$S(a,r) = \{x \in E \ / d(x,a) = r\}.$$

**Remarque 2.2.1.**

*1- $\overline{B}(a,r) \subset B_f(a,r) = B(a,r) \cup S(a,r)$.*

*2- Si $0 < r < s$, donc $B(a,r) \subset \overline{B}(a,r) \subset B(a,s)$.*

**Exemple 2.2.1.** *- Dans l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$, on trouve*

$$B(a,r) = ]a-r, a+r[, \quad B_f(a,r) = [a-r, a+r] \text{ et } S(a,r) = \{a-r, a+r\}.$$

1. *Dans $\mathbb{R}^2$ les boules ouvertes de centre 0 et de rayon 1 sont :*

$$\begin{aligned} B_{d_1}(0,1) &= \{X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / d_1(X,0) < 1\} = \{X \in \mathbb{R}^2 \ / |x|+|y| < 1\}. \\ B_{d_2}(0,1) &= \{X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / d_2(X,0) < 1\} = \{X \in \mathbb{R}^2 \ / \sqrt{x^2+y^2} < 1\}. \\ B_{d_\infty}(0,1) &= \{X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / d_\infty(X,0) < 1\} = \{X \in \mathbb{R}^2 \ / \max\{|x|,|y|\} < 1\}. \end{aligned}$$

## Ouverts d'un espace métrique

**Définition 2.2.2.** *Soit $(E,d)$ un espace métrique, on définit la famille $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{P}(E)$ par*

$$\Big(\mathcal{O} \in \mathcal{T}_d\Big) \Leftrightarrow \Big(\forall x \in \mathcal{O}, \exists r > 0 \ tq \ B(x,r) \subset \mathcal{O}\Big).$$

*$\mathcal{T}_d$ est une topologie sur E s'appelle topologie induite par la distance $d$. Les éléments $\mathcal{O}$ de $\mathcal{T}_d$ sont les ensembles ouverts pour la distance $d$.*

**Exemple 2.2.2.** *Soit $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle. $A = ]a,b[$ est un ouvert de $(\mathbb{R}, d_u)$ et $[a,b[$ n'est pas un ouvert .*

**Remarque 2.2.2.** *1- La topologie de $\mathbb{R}$ induite par la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ est la topologie usuelle.*

*2- Un espace métrique est un espace topologique particulier, donc toutes les notions définies dans les espaces topologiques ( fermé, voisinage, l'adhérence,..) sont valables pour les espaces métriques.*

**Proposition 2.2.1.** *Soient $(E,\mathcal{T}_d)$ un espace métrique et $a \in E$, $r > 0$. Alors toute boule ouverte $B(a,r)$ est un ensemble ouvert.De plus $\overline{B}(a,r)$ et $S(a,r)$ sont des ensembles fermés.*

**Preuve.** *Montrons que $(B(a,r) \in \mathcal{T}_d) \Leftrightarrow (\forall x \in B(a,r), \exists \delta > 0 \ tq \ B(x,\delta) \subset B(a,r))$. Soit $x \in B(a,r)$ quelconque alors $d(x,a) < r$, posons $\delta = r - d(x,a)$ et montrons que $B(x,\delta) \subset B(a,r)$.*
*Soit $y \in B(x,\delta) \Rightarrow d(x,y) < \delta$ et $d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) < \delta + d(x,a) = r - d(x,a) + d(x,a) = r$, donc $d(y,a) < r \Rightarrow y \in B(a,r) \Rightarrow B(x,\delta) \subset B(a,r)$.*
*Pour que $B_f(a,r)$ soit un fermé, il faut que le complémentaire de $B_f(a,r)$ soit un ouvert càd $\forall x \in C_E B_f(a,r), \exists \alpha > 0$ tel que $B(x,\alpha) \subset C_E B_f(a,r)$. Soit $x \in C_E B_f(a,r)$, donc $d(x,a) > r$. Posons $\alpha = d(x,y) - r$, montrons que $B(x,\alpha) \subset C_E B_f(a,r)$, soit $y \in B(x,\alpha) \Rightarrow ?y \in C_E B_f(a,r) \Leftrightarrow d(a,y) > r$. Grâce à la deuxième inégalité triangulaire on trouve*

$$-d(y,a) \leq d(y,x) - d(x,a) < \alpha - d(x,a) = d(x,y) - r - d(x,a)$$

*ce qui donne $d(x,a) > r$, donc $B(x,\alpha) \subset C_E B_f(a,r)$.*
*Pour montrer que $S(a,r)$ est un fermé, il suffit de remarquer que $S(a,r) = C_E B(a,r) \cap B_f(a,r)$.*

**Remarque 2.2.3.** *- La famille des boules ouvertes constitue une base topologique de $(E,\mathcal{T}_d)$.*

$$\Big(\mathcal{O} \in \mathcal{T}_d\Big) \Leftrightarrow \Big(\forall x \in \mathcal{O} \ \exists B \,/ x \in B \subset \mathcal{O}\Big).$$

- *La famille des boules $(B(x,r))_{r \in \mathbb{R}_+^*}$ est une base de voisinage de $x$.*
- *La famille des boules $(B(x,\frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base dénombrable de voisinage de $x$.*

**Proposition 2.2.2.** *Tout espace métrique est séparé.*

**Preuve.** *Exercice.*

**Proposition 2.2.3.** *Espace métrique est séparable ss'il admet une base dénombrable.*

### 2.2.2 Distances équivalentes

**Définition 2.2.3.** *Soient $d_1$ et $d_2$ deux distances définies sur E.*

1- *On dit que $d_1$ est plus fine que $d_2$ si tout ouvert pour $d_2$ est un ouvert pour $d_1$.*

   **Exemple 2.2.3.** *La distance discrète est plus fine que n'importe quelle distance définie sur E.*

- *On dit que $d_1$ et $d_2$ sont topologiquement équivalentes ssi elles sont engendrées la même topologie sur E càd elles ont les mêmes ouverts.*
- *On dit que $d_1$ et $d_2$ sont métriquement équivalentes ss'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tel que*

$$\alpha d_2 \leq d_1 \leq \beta d_2$$

### 2.2.3 Convergence d'une suite dans un espace métrique

**Proposition 2.2.4.** *Soit $(E, d)$ un espace métrique, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$*

$$(\lim_n x_n = x) \Leftrightarrow (\lim_n d(x_n, x) = 0)$$

**Preuve.** $\Rightarrow$? *Supposons que*

$$\begin{aligned} \lim_n x_n &= x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ tq \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in B(x, \varepsilon) \\ &\Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon \Rightarrow \lim_n d(x_n, x) = 0 \end{aligned}$$

$\Leftarrow$? *Supposons que*

$$\lim_n d(x_n, x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ tq \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

*Soit $V \in \mathcal{V}(x)$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tq $B(x, \varepsilon) \subset V$. d'après l'équivalence précédent, il existe $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$ ce qui implique que $x_n \in B(x, \varepsilon) \subset V$*

**Proposition 2.2.5.** *Soit $(E, d)$ un espace métrique, $A \subset E$*

$$\begin{aligned} (x \in \overline{A}) &\Leftrightarrow (\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \ \ tq \ \ \lim_n x_n = x \ \ (dans \ \mathscr{T}_d)) \\ &\Leftrightarrow (\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \ \ tq \ \ \lim_n d(x_n, x) = 0). \end{aligned}$$

**Preuve.** *Soit $x \in \overline{A}$, donc $\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset$. donc pour la base des voisinages $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ tel que $d(x_n, x) < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_n d(x_n, x) = 0$.*

*Inversement. Supposons qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ telque $\lim_n x_n = x$. Soit $V \in \mathcal{V}(x)$ comme la famille des boules ouvertes est une base de voisinage $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $B(x, \frac{1}{n_0}) \subset V$ mais on a $\forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in B(x, \frac{1}{n_0})$ ce qui donne $A \cap V \neq \emptyset$.*

### 2.2.4 Continuité d'une application entre deux espaces métriques

**Proposition 2.2.6.** *Soient $(E, \mathscr{T}_d)$ , $(F, \mathscr{T}_{d'})$ deux espaces métriques et $f$ une application de E dans F. Soit $x_0 \in E$, alors on a l'équivalence suivante :*

$$(f \ \text{ est continue au point } x_0) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \ tq \ \forall x \in E \ si \ d(x, x_0) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon)$$

**Preuve.** $\Rightarrow$? *Supposons que $f$ est continue au point $x_0$. Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in E$ tel que $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$, comme $f$ est continue on a $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ est un voisinage de $x_0$, donc il existe $\alpha$ tel que $B(x_0, \alpha) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ ce qui donne $d(x, x_0) < alpha \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$*
$\Leftarrow$? *Supposons que $(\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tq $\forall x \in E$ si $d(x, x_0) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ et montrons que $f$ est continue au point $x_0$. Soit $V$ un voisinage de $f(x_0)$ quelconque, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(x_0), \varepsilon) \subset V$. D'après la supposition il existe $\alpha > 0$ tel que $f((B(x_0, \alpha)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$.*

**Applications uniformément continues et k-Lipschitziennes**

**Définition 2.2.4.** *Soient $(E, \mathscr{T}_d)$ , $(F, \mathscr{T}_{d'})$ deux espaces métriques et $f$ une application de E dans F*

1. *On dit que $f$ est uniformément continue ssi*

$$(f \text{ est uniformément continue }) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tq } \forall x, y \in E \text{ si } d(x, y) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

2. *On dit que $f$ est $k-Lipschitzienne$ ssi*

$$\exists k \geq 0 \text{ tel que } \forall x, y \in E \text{ on a } d'(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$$

3. *On dit que $f$ est homéomorphisme ssi $f$ est continue, bijective et $f^{-1}$ est continue.*

**Exemple 2.2.4.** *Soient $(E, \mathscr{T}_d)$ un espace métrique et $y \in E$, l'application $f_y$ telle que*

$$f_y : E \to \mathbb{R}^+; \qquad x \mapsto f_y(x) = d(x, y)$$

*est continue sur E, de plus elle est 1-lipschitzienne car pour tout $x, x'$ on a*

$$|f_y(x) - f_y(x')| = |d(x, y) - d(x', y)| \leq d(x, x')$$

**Exercice 2.2.1.** *Soit $A$ une partie de $(E, d)$ montrer que l'application $g_A$ définit par*

$$g_A : E \to \mathbb{R}^+; \qquad x \mapsto g_A(x) = d(x, A)$$

*est 1-lipschitzienne.*

### 2.2.5 Espace métrique séparable

**Définition 2.2.5.** *L'espace métrique $(E, d)$ est séparable, s'il existe une partie de E dénombrable et dense dans E.*

**Exemple 2.2.5.** *L'espace métrique $\mathbb{R}$ est séparable.*

**Théorème 2.2.1.** *$(E, \mathscr{T}_d)$ est séparable ss'il existe une base dénombrable pour les ouverts de $\mathscr{T}_d$.*

**Preuve.** $\Rightarrow$? *Supposons que l'espace métrique $(E, d)$ est séparable et montrons qu'il existe une base dénombrable. E est séparable, donc il existe $D \subset E$ dénombrable et dense dans E. Soit $\mathcal{B} = \{B(x, r),\ x \in D \text{ et } r \in \mathbb{Q}\}$,remarquons que $\mathcal{B}$ est dénombrable, donc peut être énumérée en une suite $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il suffit démontrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathscr{T}_d$.*
*Soient $O \in \mathscr{T}_d$ et $I = \{n \in \mathbb{N} \ / \ O_n \subset O\}$, donc $\bigcup_{n \in I} O_n \subset O$. Montrons maintenant que $O \subset \bigcup_{n \in I} O_n$, soit $x \in O$, $\exists \delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subset O$. Soient $a \in D$ et $r \in \mathbb{Q}$ tel que $2r < \delta$ et $d(x, a) < r$. Montrons que $B(a, r) \subset B(x, \delta) \subset O$. Soit $y \in B(a, r)$ on a $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < r + r = 2r < \delta$. Donc*

*il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $O_{n_0} = B(a,r)$. Alors $\exists O_{n_0}$ tel que $x \in O_{n_0} \subset \bigcup_{n\in I} O_n$, ce qui implique que $O \subset \bigcup_{n\in I} O_n$.*
*$\Longleftarrow$? Supposons qu'il existe une base dénombrable de $\mathcal{T}_d$, et montrons que $E$ est séparable. Soit $\mathcal{B} = \{O_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ la base dénombrable. Pour Chaque $n \in \mathbb{N}$ tel que $O_n \neq \emptyset$, il existe $x_n \in O_n$. Soit $D = \{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ montrons que $D$ est dense dans $E$ c-à-d $\forall x \in E$ et $\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V \cap D \neq \emptyset$.*
*Soit $B(x,\varepsilon)$ un voisinage quelconque de $x$, donc il existe $I \subset \mathbb{N}$ tel que $B(x,\varepsilon) = \bigcup_{n\in I} O_n$, alors il existe au moins $n_0 \in I$ tel que $x_{n_0} \in B(x,\varepsilon) \Rightarrow B(x,\varepsilon) \cap D \neq \emptyset$.*

**Lemme 2.2.1.** *Soient $(E,\mathcal{T}_d)$ un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$. S'il existe $x \in E$ tel que $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, alors $x$ est unique.*

**Preuve.** *Soit $x' \in E$ tel que $x' \neq x$ et $x' = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\forall n \geq n_1 \Rightarrow d(x_n,x') < \frac{\varepsilon}{2}$, donc pour $n > \max\{n_0,n_1\}$ on trouve $d(x',x) < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0 \Rightarrow d(x',x) = 0 \Rightarrow x = x'$.*

### Valeur d'adhérence d'une suite

**Définition 2.2.6.** *Soient $(E,\mathcal{T}_d)$ un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ et $x \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons $A_n = \{x_k / \ k \geq n\}$. $x$ est appelé valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $B(x,\varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$.*

**Exemple 2.2.6.**
1. *La limite d'une suite convergente est une valeur d'adhérence.*
2. *Si $E = \mathbb{R}$ muni de la distance usuelle et $x_n = (-1)^n$ les valeurs 1 et -1 sont des valeurs d'adhérences .*

**Remarque 2.2.4.** *L'ensemble $A$ de tous les valeurs d'adhérence d'une suite $(x_n)_n$ c'est un ensemble fermé (car $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n$).*

### Sous suite

**Définition 2.2.7.** *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E$ et $\varphi$ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que $n \to \varphi(n) = n_k$. La suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle une sous suite (suite extraite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$).*

## 2.3 Suites de Cauchy et les espaces complets

### 2.3.1 Suites de Cauchy

**Définition 2.3.1.** *Soient $(E,\mathcal{T}_d)$ un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy ssi*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \ n_0 \in \mathbb{N} \ \ tq \ \ \forall p,q \in \mathbb{N} \ avec \ p \geq n_0, \ q \geq n_0 \Rightarrow d(x_p,x_q) < \varepsilon.$$

**Proposition 2.3.1.** *Soit $(E,\mathcal{T}_d)$ un espace métrique. On a les propriétés suivantes :*
1. *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente dans $E \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de Cauchy dans $E$.*
2. *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de Cauchy dans $E \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.*

**Preuve.** *Exercice.*

**Remarque 2.3.1.** *La réciproque de proposition précédente est fausse, comme le montrer l'exemple suivant*

**Exemple 2.3.1.** *1- Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites dans $\mathbb{R}$ telles que $u_n = (-1)^n$ et $v_n = \cos n$. $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont des suites bornées mais ne sont pas de Cauchy.*

*2- Si on prend la suite $x_n = \frac{1}{n}$ dans l'espace $]0,1]$ muni de la topologie de trace de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ on trouve que $(x_n)$ est de Cauchy mains n'est pas convergente.*

**Proposition 2.3.2.** *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans un espace métrique $(E, \mathcal{T}_d)$. S'il existe une sous suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers un élément $x \in E$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $x$.*

**Preuve.** *Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, alors $\forall\varepsilon > 0; \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p > q \geq n_0$ on a $d(x_p, x_q) < \frac{\varepsilon}{2}$. De plus $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers $x$ conduit à $\forall\varepsilon > 0, \exists\ n_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall\varphi(n) \geq n_0 \Rightarrow d(x_{\varphi(n)}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$, donc pour $n, \varphi(n) \geq \max\{n_0, n_1\}$, on trouve*

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

**Proposition 2.3.3.** *Soient $(E, \mathcal{T}_d)$ un espace métrique, $x \in E$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $E$. $x$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ss' il existe une sous suite $(x_{k_n})_n$ converge vers $x$.*

**Preuve.** *Soit $x$ valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\varepsilon > 0$ on a $B(x,\varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$. On construit une sous suite $(x_{p_n})$ de $(x_n)$ de la manière suivante :*
*Pour $\varepsilon = 1$,et $n = 1$ il existe $x_{p_1} \in B(x, 1) \cap A_1$ et $p_1 \geq 1$.*
*Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et $n = p_1 + 1$ il existe $x_{p_2} \in B(x, \frac{1}{2}) \cap A_{p_1+1}$ et $p_2 > p_1$.*
*De la même façon, on construit la sous suite $x_{p_1}, x_{p_2}, ..., x_{p_n}, ....$ telle que $x_{p_n} \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A_{p_n-1}$ ce qui conduit à $d(x_{p_n}, x) < \frac{1}{n}$ qui implique $x_{p_n} \to x$.*
*Inversement supposons qu'il existe $(x_{p_n})_n \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_{p_n} \to x$, et montrons que $\forall\varepsilon > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $B(x,\varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$. En effet soit $\varepsilon > 0$, de la convergence de sous suite il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p_n \in \mathbb{N}$ et $p_n \geq n_0 \Rightarrow x_{p_n} \in B(x,\varepsilon)$, ce qui donne $\forall n \geq n_0$ on a $B(x,\varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$. Pour $n \leq n_0$ en utilisant la décroissance de la suite $(A_n)$, on trouve $A_{n_0} \subset A_n \forall n \leq n_0$ donc $A_n \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$.*

## 2.4 Complétude

**Définition 2.4.1.** *Un espace métrique $E$ est dit complet si toute suite de Cauchy est convergente.*

**Exemple 2.4.1.** *L'espace $(\mathbb{R}, |.|)$ est complet.*

**Proposition 2.4.1.** *Un sous espace complet d'un espace métrique est fermé dans $E$.*

**Preuve.** *Soit $X$ un sous espace complet de l'espace métrique $E$, on va montrer que $X$ est fermé. En effet soit $x \in \overline{X}$ , il existe alors une suite $(x_n) \subset X$ tel que $(x_n)$ tend vers $x$, ce qui donne $(x_n)$ est de Cauchy dans $X$, mais $X$ est complet donc elle converge dans $X$ on déduit que $x \in X \Rightarrow \overline{X} \subset X$ d'autre part $X \subset \overline{X}$, donc $X$ est fermé.*

**Proposition 2.4.2.** *Tout sous espace fermé $X$ d'un espace complet $E$ est complet.*

**Preuve.** *Soit $X$ un espace fermé de l'espace complet $E$. On va montrer que $X$ est complet. En effet soit $(x_n)$ une suite de Cauchy dans $X \subset E$, en utilisant la complétude de $E$ on trouve que $(x_n)$ converge vers $x \in E$ d'après (2.2.5), on obtient $x \in \overline{X} = X$ ce qui implique $X$ est complet.*

**Proposition 2.4.3.** *Un produit fini ou dénombrable d'espaces complets est complet.*

**Définition 2.4.2.** *Soit E un espace métrique et $f$ une application de E dans E. On dit que $f$ est contractante si*

$$\exists \kappa \in ]0,1[,\ \ \forall (x,y) \in E^2 \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \kappa d(x,y).$$

**Exemple 2.4.2.** *Soit $E = ([\frac{2}{3}, \infty[, |.|)$ uns sous espace de $(\mathbb{R}, |.|)$ et $f$ une fonction de E dans $\mathbb{R}$ définit par*

$$f(x) = \frac{2x+6}{3x+2}$$

*$f$ est lipschitzienne car* $\sup\limits_{x\in E} |f'(x)| = \sup\limits_{x\in E} |\frac{-14}{(3x+2)^2}| \leq \frac{14}{16} < 1.$

**Théorème 2.4.1.** ***Théorème de point fixe*** *Si $f$ est contractante sur un espace métrique complet E, alors $f$ admet un point fixe c-à-d il existe $\overline{x} \in E$ tel que $f(\overline{x}) = \overline{x}$.*

**Preuve.** ***Unicité***

*Soit $\overline{x}, \overline{y}$ deux points de E tel que $\overline{x} \neq \overline{y}$ et $\overline{x} = f(\overline{x})$ et $\overline{y} = f(\overline{y})$, donc $d(\overline{x}, \overline{y}) = d(f(\overline{x}), f(\overline{y})) < d(\overline{x}, \overline{y})$, c'est contradiction.*

***Existence***

*Soit $x_0$ un point quelconque de E, on définit la suite $(x_n)_n$ dans E par $x_{n+1} = f(x_n)$. On a*

$$\begin{array}{rcl} d(x_2, x_1) & \leq & \kappa d(x_1, x_0) \\ d(x_3, x_2) & \leq & \kappa d(x_2, x_1) \leq \kappa^2 d(x_1, x_0) \\ & \vdots & \\ d(x_{n+1}, x_n) & \leq & \kappa d(x_n, x_{n-1}) \leq \kappa^n d(x_1, x_0) \end{array}$$

*pour $p, q \in \mathbb{N}$ tel que $p > q \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $p = q + n$, donc*

$$\begin{array}{rcl} d(x_p, x_q) & = & d(x_{q+n}, x_q) \leq d(x_{q+n}, x_{q+n-1}) + d(x_{q+n-1}, x_{q+n-2}) + .... + d(x_{q+1}, x_q) \\ & \leq & (\kappa^{n-1} + \kappa^{n-2} + .... + \kappa + 1)\kappa^q d(x_1, x_0) \\ & \leq & \dfrac{\kappa^q}{1-\kappa} d(x_1, x_0) \end{array}$$

*donc*

$$\lim_{q\to\infty} d(x_{q+n}, x_q) = \lim_{q\to\infty} \frac{\kappa^q}{1-\kappa} d(x_1, x_0) = 0$$

*Donc $(x_n)_n$ est de Cauchy dans un espace complet, elle est convergente. Il existe $\overline{x} \in E$ tel que*

$$\overline{x} = \lim x_n = \lim f(x_{n-1}) = f(\overline{x}).$$

**Exemple 2.4.3.** *On prend les mêmes données de l'exemple (2.4.2) et montrons que $f$ admet un seul point fixe. Pour démontrer ça il faut démontrer que E est complet et $f(E) \subset E$. On a E est complet car il est fermé dans un complet, donc il est complet . Ce qui concerne $f(E) \subset E$ on a $f'(x) = \frac{-14}{(3x+2)^2} < 0$, ce qui implique $f$ est décroissante et $f(E) = ]\lim\limits_{x\to\infty} f(x), f(\frac{2}{3}] = ]\frac{2}{3}, \frac{11}{6}] \subset E$, donc $f$ vérifie tous les conditions du Théorème (2.4.1). En utilisant le Théorème (2.4.1) il existe alors $\overline{x} = f(\overline{x}) \Rightarrow \overline{x} = \sqrt{2}$.*

**Remarque 2.4.1.** *Toutes les hypothèses du Théorème (2.4.1) sont nécessaire, comme le montre l'exemple suivant.*

**Exemple 2.4.4.**
1. *Si* $E = ]0,1[$ *et* $f(x) = \frac{x}{2}$. $f$ *n'admet pas un point fixe car* $E$ *n'est pas complet.*
2. *Si* $E = [0,1]$ *et* $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ $f$ *n'admet pas un point fixe car* $f(E) \nsubseteq E$.
3. *Si* $E$ *un espace métrique complet quelconque et* $f(x) = x$, *tout les points est fixe car* $f$ *n'est pas contractante.*

# Chapitre 3

# Espaces compacts

**Définition 3.0.1.** *1. Soient $(E,\mathscr{T})$ un espace topologique et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de E si $E \subset \underset{i\in I}{\cup} A_i$ .*

*2. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de E si $E \subset \underset{i\in I}{\cup} A_i$ et $(A_i)_{i\in I} \subset \mathscr{T}$.*

*3. Un espace topologique E est dit compact s'il est séparé et si tout recouvrement ouvert de E contient un sous recouvrement fini càd*

$$\forall (O_i)_{i\in I} \subset \mathscr{T} \text{ tq } E \subset \underset{i\in I}{\cup} O_i \Rightarrow \exists J \;\; fini \subset I \text{ et } E \subset \underset{i\in J}{\cup} O_i$$

**Exemple 3.0.1.** *1. Si E un ensemble fini munit de la topologie discrète, E est compact.*

*2. $\mathbb{R}$ n'est pas compact, car $\mathbb{R} = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} ]-n,n[$ et on peut pas extraire un sous recouvrement fini de cet recouvrement.*

### 3.0.1 Ensembles compacts

**Définition 3.0.2.** *Soient $(E,\mathscr{T})$ un espace topologique séparé et A un sous ensemble de E. On dit que A est compact ssi $(A,\mathscr{T}_A)$ est compact.*

**Proposition 3.0.1.** *Si E est compact et si F un sous ensemble de E, donc on a l'équivalence suivant :*

$$F \text{ est fermé de } E \Leftrightarrow F \text{ est compact de } E.$$

**Preuve.** $\Rightarrow$?*Supposons que F est fermé et montrons que F est compact de E. Montrons tout d'abord que F est séparé, soit x et y deux points de $F \subset E$, donc il existe deux voisinages $V_x \in \mathcal{V}(x)$ et $V_y \in \mathcal{V}(y)$ tel que $V_x \cap V_y = \emptyset$, ce qui implique. On a $V_x \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists O_x \in \mathscr{T}$ tel que $x \in O_x \subset V_x$ la même chose pour $V_y$ il existe $O_y \in \mathscr{T}$ tel que $y \in O_y \subset V_y$ . Posons $W_x = F \cap O_x \in \mathscr{T}_F$ et $W_y = F \cap O_y \in \mathscr{T}_F$ et $W_x \cap W_y = \emptyset$, donc F est séparé. Montrons maintenant pour tout recouvrement ouvert de F on peut extraire un sous recouvrement fini . Soit $(A_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert quelconque de F, posons $O = C_E F$, donc $(O,(A_i)_{i\in I})$ est un recouvrement ouvert de E, on peut extraire un sous recouvrement $A_1, A_2, ...., A_n$ tel que $E \subset O \underset{1\leq i\leq n}{\cup} A_I$, donc $F \subset \underset{1\leq i\leq n}{\cup} A_I$ ce qui donne le résultat.*

$\Leftarrow$? *Supposons maintenant que F est compact et montrons que F est fermé. Pour prouver que F est fermé, il suffit démontrer que $C_E^F$ est un ouvert càd est un voisinage de chacun de ses points . Soit $x \in C_E^F$, donc $\forall y \in F$ il existe deux voisinage ouverts disjoints $V_y \in \mathcal{V}(y)$ et $V_{x,y} \in \mathcal{V}(x)$. La* *famille $(V_y)_{y\in F}$ est un recouvrement ouvert de F donc il existe un recouvrement fini $(V_{y_i})_{1\leq i\leq n}$ tel que $F \subset \bigcup_{1\leq i\leq n} V_{y_i}$. Posons $V = \bigcap_{1\leq i\leq n} V_{x,y_i} \in \mathcal{V}(x)$et $V \cap F = \emptyset$ donc $x \in V \subset C_E^F$ ce qui implique que F est fermé.*

**Définition 3.0.3.** *Une partie X d'un espace topologique séparé E est dite relativement compacte si elle contenue dans une partie compacte de E.*

**Remarque 3.0.1.**

1. *Toute partie compacte A d'un espace topologique séparé $(E,\mathcal{T})$ est fermé.*
2. *Soient $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique séparé et $K, K'$ deux parties de E. Si $K \subset K'$ telle que K est fermée et $K'$ est compacte dans E, alors K est compacte dans E.*

## 3.1 Espace Métrique compact

**Définition 3.1.1.** *Soit $(E,\mathcal{T}_d)$ un espace métrique. On dit que E est compact ssi toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E admet une valeur d'adhérence.*

**Lemme 3.1.1.** *Soit $(E,\mathcal{T}_d)$ un espace métrique compact alors pour tout réel strictement positif $\alpha$, on peut recouvrir E par un nombre fini de boules de rayon $\alpha$.*

**Preuve.** *Démontrons par contra-position. Supposons qu'il existe un réel strictement positif $\alpha$ tel que l'on ne puisse recouvrir E par un nombre fini de boules de rayon $\alpha$. Soit $x_0 \in E$ quelconque, il existe $x_1 \in E\backslash B(x_0,\alpha)$ donc $d(x_0,x_0) \geq \alpha$, par supposition $E \neq B(x_0,\alpha) \cup B(x_1,\alpha)$, il existe alors $x_2 \in E\backslash B(x_0,\alpha) \cup B(x_1,\alpha)$, de la même façon, on construit les points $x_0, x_1, \ldots.., x_n$ tel que $d(x_i,x_j) \geq \alpha$ $\forall i \neq j$. Par hypothèse $\bigcup_{1\leq i\leq n} B(x_i,\alpha) \neq E$ donc il existe $x_{n+1} \in E\backslash \bigcup_{1\leq i\leq n} B(x_i,\alpha)$, par récurrence, on construit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $d(x_i,x_j) \geq \alpha$ $\forall i \neq j$. Une telle suite n'a pas de valeur d'adhérence. D'où le lemme.*

**Remarque 3.1.1.** *Si $(E,\mathcal{T}_d)$ est un espace métrique compact, alors il est borné.*

**Proposition 3.1.1.** *Soit $(E,\mathcal{T}_d)$ un espace métrique compact, alors il est complet.*

**Preuve.** *Exercice.*

**Théorème 3.1.1.** *Soit $(E,\mathcal{T}_d)$ un espace métrique complet. Si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir E par un nombre fini de boules ouvertes de rayon $\varepsilon$, alors E est compact.*

**Proposition 3.1.2.** *Si $K_1, K_2, ..., K_n$ n espaces compacts, alors $K = K_1 \times K_2 \times .....K_n$ est compact*

**Preuve.** *Il suffit démontrer la proposition pour $n = 2$. Soit $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K = K_1 \times K_2$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K_1$ comme $K_1$ est compact, alors il existe $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in K_1$. D'autre part la suite $(y_{\phi(n)}) \subset K_2$ admet une sous suite $(y_{\psi\circ\phi(n)})$ qui converge vers $y \in K_2$. Donc la sous suite $(x_{\psi\circ\phi(n)}), y_{\psi\circ\phi(n)}) \subset K$ converge vers $(x,y) \in K$ ce qui implique que K est compact.*

**Proposition 3.1.3.** *Dans un espace métrique E, l'intersection finie ou infinie des compacts est compact.*

**Preuve.** *Exercice*

**Les parties compactes de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$**

**Théorème 3.1.2.** $(De\ Bolzano - Weierstrass)$ *Les intervalles fermés* $[a,b]$ *sont des parties compactes de* $(\mathbb{R}, |.|)$

Comme conclusion on trouve le lemme suivant :

**Lemme 3.1.2.** *Les parties compactes de* $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ *sont les parties fermées de* $\mathbb{R}^n$ *incluses dans un pavé* $[a,b]^n$.

### 3.1.1 La relation entre la continuité et la compacité

**Théorème 3.1.3.** $(De\ Heine)$ *Soit* $(E,d)$ *et* $(F,d')$ *deux espaces métriques et* $f$ *une application continue de* $E$ *dans* $F$*. Alors pour toutes partie compacte* $A$ *de* $E$, $f(A)$ *est une partie compacte de* $F$*. De plus si* $E$ *est compact, alors* $f$ *est uniformément continue.*

**Corollaire 3.1.1.** *Soient* $(E, \mathcal{T}_d)$ *un espace métrique compact et* $f$ *une application de* $E$ *dans* $(\mathbb{R}, |.|$. *Si* $f$ *est continue, alors* $f$ *est bornée et atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure.*

**Preuve.** *Exercice.*

# Chapitre 4

# Espaces normés

## 4.1 Normes

Soit $E$ un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k}$, ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{k} = \mathbb{C}$). On appelle norme sur $E$ toute application de $E$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\| \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k}$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in E$.

Le couple $(E, \|.\|)$ est appelé un espace normé.

**Remarque 4.1.1.** *Si la propriété (1) n'est pas satisfaite, on dit que cette application est une semi-norme.*

**Exemple 4.1.1.** *1. Soit $E = C[a,b]$, on définit la norme $\|.\|_1$ sur $E$ par*

$$\forall f \in E; \quad \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$$

*2. Pour $p \geq 1$ et $E = \mathbb{k}^n$, on définit les normes suivantes pour tout $x \in \mathbb{k}^n$ :*

$$\|x\|_p = (\sum_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}} \quad et \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

*3. Si E un espace compact, on peut définir pour tout $f \in C(E, \mathbb{R})$ la norme*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|$$

**Proposition 4.1.1.** *Si $\|.\|$ est une norme sur $E$, la fonction*

$$d : E \times E \to \mathbb{R}^+ \quad (x, y) \to d(x, y) = \|x - y\|$$

*est une distance sur $E$.*

**Preuve.** *Exercice.*

**Définition 4.1.1.** *1. On appelle boule unité d'un espace normé la boule de centre 0 et de rayon 1.*

$$B(0,1) = \{x \in E \ \ tq \ \ d(x,0) = \|x\| \leq 1\}$$

2. *On appelle espace de Banach tout espace normé complet pour la distance associée à la norme.*

**Exemple 4.1.2.** $(\mathbb{R}, \|.\|)$ *et* $(C([a,b]), \|.\|_\infty)$ *sont des espaces de Banach.*

**Définition 4.1.2.** *Deux normes* $\|.\|_1, \|.\|_2$ *sur* $E$ *sont équivalentes s'il existe deux constantes* $\alpha$ *et* $\beta$ *strictement positives telles que*

$$\forall x \in E \quad \alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1.$$

**Exemple 4.1.3.** *Sur* $\mathbb{R}^n$ *on définit les normes*

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}|x_i| \ , \quad \|x\|_1 = \sum_{1\leq i\leq n}|x_i| \quad et \quad \|x\|_2 = (\sum_{1\leq i\leq n}(x_i\ )^2)^{\frac{1}{2}}$$

*les trois normes sont équivalentes car :*

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \leq n\|x\|_\infty.$$

**Théorème 4.1.1.** *Deux normes* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *définissent sur* $E$ *la même topologie ssi elles sont équivalentes.*

**Théorème 4.1.2.**
1. *Pour* $1 \leq p \leq \infty$, *les espaces* $(\mathbb{k}^n, \|.\|_p)$ *sont des espaces vectoriels normés.*
2. *Sur l'espace vectoriel* $\mathbb{k}^n$, *toutes les normes sont équivalentes.*
3. *Dans un espace normé, tout sous espace de dimension finie est fermé.*

### Application linéaire continue

**Théorème 4.1.3.** *Soit* $f$ *une application linéaire de l'espace normé* $E$ *dans l'espace normé* $F$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. $f$ *est continue sur* $E$.
2. $f$ *est continue au point* $0$.
3. $f$ *est uniformément continue sur* $E$.
4. $\exists M > 0$ *telle que* $\forall x \in E \quad \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$.

**Exemple 4.1.4.** *Soit* $E = C([0,1], \mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|.\|_\infty$. *On considère l'application* $A : E \to E$ *tel que*

$$\forall f \in E; \quad Af(t) = \int_0^t f(s)ds$$

*l'application* $A$ *est linéaire continue car*

$$\|Af\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

### Inégalité de Hölder et de Minkowski

**Lemme 4.1.1.** (*Inégalité de Hölder*). *Soient* $a_1, a_2, ..., a_n$ *et* $b_1, b_2, ..., b_n$ *des réels positifs ou nuls. Soient* $p$ *et* $q$ *des réels strictement supérieurs à* $1$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *On a alors l'inégalité suivante :*

$$\sum_{1\leq i\leq n} a_i b_i \leq (\sum_{1\leq i\leq n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{1\leq i\leq n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}.$$

**Preuve.** *Si les $a_i$ sont tous nuls, la propriété est vérifie même si tous les $b_i$ sont nuls.*
*Supposons que les $a_i$ et $b_i$ ne sont pas tous nuls. Considérons*

$$A = \sum_{1\leq i\leq n} \frac{a_i}{(\sum\limits_{1\leq i\leq n} a_i^p)^{\frac{1}{p}}}.\frac{b_i}{(\sum\limits_{1\leq i\leq n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}}$$

*En utilisant l'inégalité*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad avec\ p,q \in \mathbb{R}^+ et\ p,q > 1 \quad avec\ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

*on trouve*

$$\begin{aligned} A &\leq \sum_{1\leq i\leq n} (\frac{1}{p}\frac{a_i^p}{\sum\limits_{1\leq i\leq n} a_i^p} + \frac{1}{q}\frac{b_i^q}{\sum\limits_{1\leq i\leq n} b_i^q}) \\ &= \frac{1}{p}\sum_{1\leq i\leq n}\frac{a_i^p}{\sum\limits_{1\leq i\leq n} a_i^p} + \frac{1}{q}\sum_{1\leq i\leq n}\frac{b_i^q}{\sum\limits_{1\leq i\leq n} b_i^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

*d'ou l'inégalité.*

**Lemme 4.1.2.** ($Inégalité\ de\ Minkowski$). *Soient $a_1, a_2, ..., a_n$ et $b_1, b_2, ..., b_n$ des réels positifs ou nuls. Soit $p > 1$. On a alors l'inégalité suivante :*

$$(\sum_{1\leq i\leq n} (a_i + b_i)^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{1\leq i\leq n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{1\leq i\leq n} b_i^p)^{\frac{1}{p}}$$

**Preuve.** *Si $p = 1$ l'inégalité est claire. Supposons que $p > 1$. Si on pose $c_i = a_i + b_i$, on a alors*

$$\sum_{1\leq i\leq n} c_i^p = \sum_{1\leq i\leq n} c_i c_i^{p-1} = \sum_{1\leq i\leq n} a_i c_i^{p-1} + \sum_{1\leq i\leq n} b_i c_i^{p-1}$$

*Posons $q = \frac{p}{(p-1)}$, on applique l'inégalité de Hölder à chacune des deux sommes, on trouve :*

$$\sum_{1\leq i\leq n} c_i^p \leq (\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq i\leq n}} a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{1\leq i\leq n} c_i^p)^{\frac{p-1}{p}} + (\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq i\leq n}} b_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{1\leq i\leq n} c_i^p)^{\frac{p-1}{p}}$$

*En divisant les deux membres par $(\sum\limits_{1\leq i\leq n} c_i^p)^{\frac{p-1}{p}}$, on obtient l'inégalité de Minkowski.*