Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Introduction à la Topologie
A-Hanachi, A-Karra
2020-2021

Nom : Prénom : Section :

DEVOIR À DOMICILE
$2^{\text{ÈME}}$ ANNÉE LICENCE MATHS.

A rendre le jour de l'examen (07/04/2021) format papier

Questions V/F Répondre par **Vrai** ou **Faux** aux affirmations suivantes en justifiant vos réponses.

1- Il existe des espaces métriques qui ne sont pas topologiques.

2- Soient (E,d) et (E,δ) deux espaces métriques. Si $\mathscr{O}$ est un ouvert pour $\mathscr{T}_d$, alors il est un ouvert pour $\mathscr{T}_\delta$.

3- Soient (E,d_1) et (E,d_2) deux espaces métriques. Soit $(x_n)_n$ une suite dans E qui converge vers x par rapport à d_1, alors $(x_n)_n$ converge vers x par rapport à d_2.

4- Soit (E,d) un espace métrique et soit l'application $\delta : \mathscr{P}(E)X\mathscr{P}(E) \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$\forall A,B \in \mathscr{P}(E); \quad \delta(A,B) = \inf_{x\in A, y\in B} d(x,y).$$

Si $\delta(A,B) = 0$, alors $A = B$.

5- Dans un espace métrique la limite d'une suite si elle existe elle est unique.

6- Si d_1 et d_2 sont deux distances topologiquement équivalentes sur E, alors elles sont métriquement équivalentes.

7- Si (E,d) est un espace métrique et A une partie non vide de E, alors on a a- Tout fermé (resp ouvert) pour (A, d_A) est un fermé (resp ouvert) pour (E, d).

b- Toute suite convergente dans (E, d) est convergente dans (A, d_A).

c- Toute application continue sur E est continue sur A.

d- Toute application continue sur A est continue sur E.

8- Dans un espace métrique l'intersection (resp. la réunion) de deux parties denses est dense.

9- Si $f : (\mathbb{R}, |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ avec $f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$, alors
a- $f(]-1, 1[)$ est un ouvert.

b- $f^{-1}\{\lambda\}$ est un ouvert.

10- Dans $([-1, 1], |.|)$, toute suite admet une sous suite convergente.

12- Tout sous espace d'un espace complet est complet.

11- Si f est une application $k-$lipschitzienne sur un espace complet, alors elle admet un point fixe unique.

Bon courage.