REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et la recherche scientifique

Université de batna 02

Faculté des Mathématiques et Informatique

Département des Mathématiques

Support de cours

Option : 2 ème année Licence Mathématique Académique

Introduction à la topologie générale

Hanachi Adalet

Année Universitaire : 2021 - 2022

Table des matières

Chapitre 1

Les espaces métriques

1.1 Introduction

Le but de ce chapitre est l'étude les espace métriques qui sont un cas particulier des espaces topologiques, ils sont constituent des espaces importants dans l'analyse fonctionnelle. Ils sont introduits par M. Frechet en 1906, peu de temps après, F. Haussdroff les développez. L'idée de ces espaces est née à l'analyse des principales propriétés de la distance usuelle. L'extension des propriétés de l'espace euclidien aux espaces métriques introduit un langage géométrique dans de nombreuses questions d'analyse et de théorie des nombres (comme les voisinages, la limite et la continuité, ..).

La topologie s'interesse à l'étude des concepts de limites et de continuité. On sait que pour définir la notion de limite, il faut se donner un moyen de savoir si deux points sont voisins. Pour cela, il est assez naturel de mesurer la distance entre ces deux points. On peut donc parler facilement de limite pour les applications agissant entre des espaces sur lesquelles une distance a été définie. Dans certains cas, nous avons des applications dans un espace de fonctions sur lequel il n'y a pas de distance qui rende les fonctions continues. Il faut donc ajouter une notion autre que la distance, pour déterminer que les deux points sont voisins. D'où la notion de voisinage.

1.2 Distance sur un ensemble

Définition 1.2.1. *Soit E un ensemble non vide. On appelle distance toute application*

$$d : E \times E \to \mathbb{R}^+ \quad (x,y) \to d(x,y) \geq 0$$

telle que

1- $\forall (x,y) \in E^2, \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$

2- $\forall (x,y) \in E^2, \quad d(x,y) = d(y,x)$ *symétrie*

3- $\forall (x,y,z) \in E^3, \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *inégalité triangulaire (première forme).*

$(E;d)$ s'appelle un espace métrique.

Exemple 1.2.1. - *On muni* $\mathbb{R}$ *de la distance usuelle* $d(x,y) = |x-y|$ *avec* $x,y \in \mathbb{R}$

- *Soit E un ensemble quelconque non vide. Pour tout* $x,y \in E$, *on pose*

$$d(x,y) = \{ \begin{array}{ll} 1 & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y \end{array} .$$

$(E;d)$ est un espace métrique, d s'appelle distance discrète sur E.

- *Soit $E = \mathbb{R}^n$ on définit les distances suivantes : $\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ avec $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$*

$$\begin{aligned} d_1(X,Y) &= \sum_{1 \le i \le n} |x_i - y_i| \\ d_2(X,Y) &= \sqrt{\sum_{1 \le i \le n} (x_i - y_i)^2} \\ d_\infty(X,Y) &= \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i| \end{aligned}$$

Exercice 1.2.1. *Soit d une application sur $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ satisfait les propriétés (1) et (3) de la définition 1.2.1, mais pas la propriété (2). Montrer que d' définie par :*

$$d'(x,y) = \frac{1}{2}(d(x,y) + d(y,x))$$

est une distance sur E.

Proposition 1.2.1. *i- $\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in E^n$, $d(x_1, x_n) \le \sum_{1 \le i \le n-1} d(x_i, x_{i+1})$.*

ii- $\forall (x,y,z) \in E^3$, on a $|d(x,z) - d(z,y)| \le d(x,y)$ 2^{eme} inégalité triangulaire (seconde forme).

Preuve 1. *L'assertion i) est une application directe du 1^{ere} inégalité triangulaire de la définition. Pour démontrer ii) il suffit démontrer que :*

$$-d(x,y) \le d(x,z) - d(z,y) \le d(x,y); \quad \forall (x,y,z) \in E^3 \tag{1.1}$$

Du 1^{ere} inégalité triangulaire on a $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) \Rightarrow d(x,z) - d(z,y) \le d(x,y)$.
De plus $d(y,z) \le d(y,x) + d(x,z) \Rightarrow -d(x,y) \le d(x,z) - d(z,y)$ combinant les deux dernières inégalités on obtient (1.1).

Exercice 1.2.2. *exo1- Soit $E = C([a,b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles. On définit sur E l'application d par : $\forall f,g \in E; \quad d(f,g) = max_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)|$. Montrer que d est une distance sur E.*

exo2- Considérons le même ensemble E, et on définit l'application d par :
$\forall f,g \in E; \quad d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$. Montrer que d est une distance sur E.

exo3- Soit d une distance sur E. Montrer que $\delta = \frac{d}{1+d}$ est une distance sur E.

Solution d'exercice 1.2.1. *Rappelons d'une part que toute fonction continue sur un borné est bornée de plus atteint sa borne, d'autre part la différence entre deux fonctions continues est continue. Donc d est bien définie. On passe maintenant à la vérification les 3 points du définition.*

1- *Soit f,g deux éléments qlqs de E tel que $d(f,g) = 0$, donc $max_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)| = 0$, comme la fonction $|f(x) - g(x)|$ est positive et $|f(x) - g(x)| \le max_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)|$ pour tous $x \in [a,b]$, on trouve $|f(x) - g(x)| = 0 \quad \forall x \in [a,b]$ grâce aux propriétés de la valeur absolue sur $\mathbb{R}$ on trouve $f(x) - g(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$, donc $f \equiv g$.*
2- *Grâce à la symétrie du valeur absolue sur $\mathbb{R}$, on trouve $d(f,g) = d(g,f)$.*
3- *$\forall f,g,h \in E$, on a $|f(x) - g(x)| = |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \le |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$, d'où le résultat*

Combinant les trois propriétés,on trouve que d est une distance sur E.
Pour le 2^{eme} exercice, on suit la même méthode que l'exercice 1.
Pour le 3^{eme} exercice, il suffit démontrer l'inégalité triangulaire. En effet
Notons que

$$\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} = 1 - \frac{1}{1+d(x,z)},$$

de plus

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z),$$

donc

$$\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \leq 1 - \frac{1}{1+d(x,y)+d(y,z)}.$$

Par l'unification les dénominateurs, on trouve le résultat.

1.2.1 Distance entre deux parties et diamètre

Définition 1.2.2. *Soient A et B deux parties non vides d'un espace métrique (E,d). On définie la distance entre les deux parties A et B par*

$$dist(A,B) = \inf_{x\in A; y\in B} d(x,y)$$

Remarque 1.2.1. *1- Si $A = \{a\}$, on trouve $d(a,B) = \inf_{y\in B} d(a,y)$.*

2- Si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $dist(A,B) = 0$.

3- L'application $dist : \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ dans $\mathbb{R}^+$ n'est pas une distance sur $\mathcal{P}(E)$.

Exemple 1.2.2. *Dans $(\mathbb{R}, d_u)$ si $A = [2,4]$ et $B = [-1,2]$, on trouve $dist(A,B) = 0$.*

Diamètre d'un ensemble

Définition 1.2.3. *Le diamètre d'un sous ensemble non vide A de E est le nombre réel positif*

$$diam(A) = \sup_{x,y\in A} d(x,y).$$

Remarque 1.2.2. *A est borné si $diam(A) < \infty$.*

Exemple 1.2.3. *1- Dans $(\mathbb{R}, d_u)$, si $A = [-1,4]$, on trouve $diam(A) = 5$.*

2- Dans $(\mathbb{R}^2, d_2)$, si A est le triangle de sommets $(0,0),(0,1)$ et $(2,0)$. Le diamètre de A est

$$\begin{aligned} diam(A) &= \sup_{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A} d_2\Big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\Big) \\ &= \sup_{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A} \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \\ &= d_2\Big((0,1),(2,0)\Big) = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

1.2.2 Distance induite

Définition 1.2.4. *Soient (E, d_E) un espace métrique et A une partie de E. On définit la restriction $d_A : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\forall (x,y) \in A^2 \quad d_A(x,y) = d_E(x,y)$. d_A est la distance induite par d_E sur A et (A, d_A) est un sous espce métrique de (E, d_E)*

Exemple 1.2.4. *Pour toute partie non vide A de $(\mathbb{R}, |.|)$, on peut définir le sous espace métrique (A, d_A) avec $\forall x, y \in A$ on a $d_A(x,y) = |x-y|$.*

1.2.3 Distance produit

Définition 1.2.5. *Soient (E_1, d_{E_1}) et (E_2, d_{E_2}) deux espaces métriques. On peut définir des distances sur l'espace produit $E = E_1 \times E_2$ comme suit : $\forall X = (x_1, y_1), Y = (x_2, y_2) \in E$*

$$\begin{aligned}
d_1(X,Y) &= d_{E_1}(x_1,x_2) + d_{E_2}(y_1,y_2) \\
d_2(X,Y) &= \sqrt{d_{E_1}(x_1,x_2)^2 + d_{E_2}(y_1,y_2)^2} \\
d_\infty(X,Y) &= \max\{d_{E_1}(x_1,x_2), d_{E_2}(y_1,y_2)\}
\end{aligned}$$

Exemple 1.2.5. *On définit sur $\mathbb{R}^2$ les distances suivantes : soit $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$*

$$\begin{aligned}
d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\
d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &= \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} \\
d_\infty(X,Y) &= \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}
\end{aligned}$$

Exercice 1.2.3. *Donner la distance entre $(1,5)$ et $(-2,4)$ par d_1, d_2 et d_∞. Que concluez-vous ?*

1.2.4 Distances métriquement équivalentes

Définition 1.2.6. *Soient d_1 et d_2 deux distances définies sur E. On dit que d_1 et d_2 sont métriquement équivalentes ss'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tel que*

$$\alpha d_2 \leq d_1 \leq \beta d_2$$

Exercice 1.2.4. *Montrer que les trois distances d_1, d_2 et d_∞ définies dans l'exemple 1.2.5 sont métriquement équivalentes.*

1.3 Topologie des espaces métriques

1.3.1 Boules - Sphères

Définition 1.3.1. *Soient (E,d) un espace métrique et $a \in E$, $r > 0$*

1. *La boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$ est*

$$B(a,r) = \{x \in E \,/ d(x,a) < r\}.$$

2. *La boule fermée de centre a et de rayon $r > 0$ est*

$$B_f(a,r) = \{x \in E \,/ d(x,a) \leq r\}.$$

3. *La sphère de centre a et de rayon* $r > 0$ *est*

$$S(a,r) = \{x \in E \,/ d(x,a) = r\}.$$

Remarque 1.3.1.

1- $B_f(a,r) = B(a,r) \cup S(a,r)$.

2- *Si* $0 < r < s$, *donc* $B(a,r) \subset B(a,s)$.

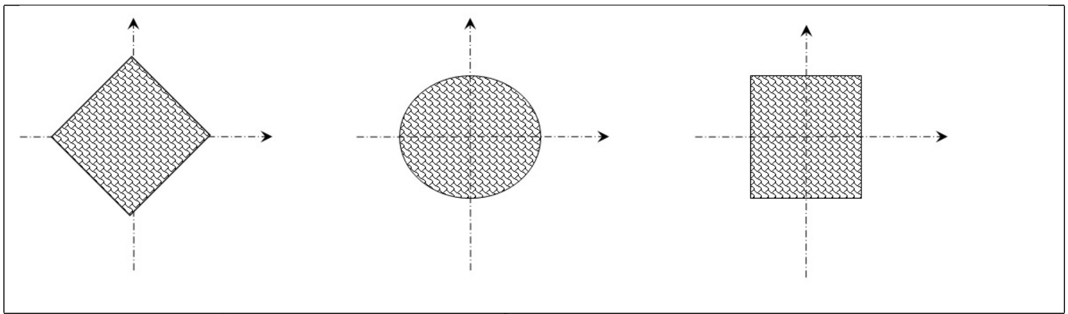
Exemple 1.3.1. - *Dans l'ensemble* $\mathbb{R}$ *muni de la distance usuelle* $d(x,y) = |x-y|$, *on trouve*

$$B(a,r) =]a-r, a+r[, \quad B_f(a,r) = [a-r, a+r] \text{ et } S(a,r) = \{a-r, a+r\}.$$

1. *Dans* $\mathbb{R}^2$ *les boules ouvertes de centre 0 et de rayon 1 sont :*

$$\begin{aligned} B_{d_1}(0,1) &= \{X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/ d_1(X,0) < 1\} = \{X \in \mathbb{R}^2 \,/ |x| + |y| < 1\}. \\ B_{d_2}(0,1) &= \{X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/ d_2(X,0) < 1\} = \{X \in \mathbb{R}^2 \,/ \sqrt{x^2 + y^2} < 1\}. \\ B_{d_\infty}(0,1) &= \{X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/ d_\infty(X,0) < 1\} = \{X \in \mathbb{R}^2 \,/ \max\{|x|,|y|\} < 1\}. \end{aligned}$$

Le schéma suivant illustre les trois boules fermées dans $\mathbb{R}^2$.



$B_f^1(0,1)$ $B_f^2(0,1)$ $B_f^\infty(0,1)$

Remarque 1.3.2. *Le schéma précédent montre que les boules ne sont pas toujours rondes.*

1.3.2 Les ouverts, fermés et voisinage d'un espace métrique

Définition 1.3.2. *Soient* (E,d) *un espace métrique, x un point de E et* $\mathcal{O}, F, V_x$ *des parties dans E. On dit que*

1- $\mathcal{O}$ *est ouverte dans E, si* $\forall x \in \mathcal{O}, \exists r > 0$ *tel que* $B(x,r) \subseteq \mathcal{O}$.

2- *F est fermée dans E, si* C_E^F *est ouvert dans E.*

3- V_x *est un voisinage de x, s'il existe* $r > 0$ *tel que* $B(x,r) \subseteq V_x$.

Exemple 1.3.2. 1- *Soit* $\mathbb{R}$ *muni par la distance usuelle* d_u

a- $\mathbb{R}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$, *donc* $\emptyset$ *est un fermé.*

b- *L'intervalle* $]a,b[$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$. *En effet* $\forall x \in]a,b[\Rightarrow a < x < b$, *alors* $x - a > 0$ *et* $b - x > 0$. *Posons* $r = \min\{x-a, b-x\}$ *remarquons que* $B(x,r)$ *la boule de centre x et de rayon r est inclue dans* $]a,b[$.

c- *Les intervalles* $(-\infty, a)$ *et* (b, ∞) *sont des ouverts dans* $\mathbb{R}$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.3.1. *Montrer que*

1- *Tout ouvert est un voisinage de tous ses points.*

2- *La réunion quelconque des voisinages de x est un voisinage de x.*
3- *L'intersection finies des voisinages de x est un voisinage de x.*

Solution d'exercice 1.3.1. 1- *Soit x un élément quelconque dans un ouvert $\mathcal{O}$, comme $\mathcal{O}$ est un ouvert, il existe un $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subset \mathcal{O}$, ce qui donne $\mathcal{O}$ est un voisinage de x.*

2- *Soit $(V_i)_{i\in I}$ une famille de voisinage de x. Montrons que $\cup_{i\in I} V_i$ est un voisinage de x. Comme V_i, $\forall i \in I$ est un voisinage de x, alors il existe r_i tel que $B(x, r_i) \subset V_i \subset \cup_{i\in I} V_i$. D'où le résultat.*

3- *$(V_i)_{i\in I\subset\mathbb{N}}$ avec I fini une famille de voisinage de x, montrons que $\cap_{i\in I} V_i$ est un voisinage de x. On a pour chaque V_i, il existe r_i tel que $B(x, r_i) \subset V_i$. Donc $\cap_{i\in I} B(x, r_i) \subset \cap_{i\in I} V_i$, mais $\cap_{i\in I} B(x, r_i) = B(x, \min\{r_i, /i \in I\})$. Donc il existe $r = \min\{r_i, /i \in I\}$ tel que $B(x, r) \subset \cap_{i\in I} V_i$. D'où le résultat.*

Proposition 1.3.1. *Soient (E, d) un espace métrique et $a \in E$, $r > 0$. Alors toute boule ouverte $B(a, r)$ est un ensemble ouvert. De plus $B_f(a, r)$ et $S(a, r)$ sont des ensembles fermés.*

Preuve 2. *Montrons que $(B(a, r) \text{est} \quad \text{ouvert}) \Leftrightarrow (\forall x \in B(a, r), \exists \delta > 0 \ tq \ B(x, \delta) \subset B(a, r))$. Soit $x \in B(a, r)$ quelconque alors $d(x, a) < r$, posons $\delta = r - d(x, a)$ et montrons que $B(x, \delta) \subset B(a, r)$. Soit $y \in B(x, \delta) \Rightarrow d(x, y) < \delta$ et $d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < \delta + d(x, a) = r - d(x, a) + d(x, a) = r$, donc $d(y, a) < r \Rightarrow y \in B(a, r) \Rightarrow B(x, \delta) \subset B(a, r)$.*
Pour que $B_f(a, r)$ soit un fermé, il faut que le complémentaire de $B_f(a, r)$ soit un ouvert càd $\forall x \in C_E B_f(a, r), \exists \alpha > 0$ tel que $B(x, \alpha) \subset C_E B_f(a, r)$. Soit $x \in C_E B_f(a, r)$, donc $d(x, a) > r$. Posons $\alpha = d(x, y) - r$, montrons que $B(x, \alpha) \subset C_E B_f(a, r)$, soit $y \in B(x, \alpha) \Rightarrow ?y \in C_E B_f(a, r) \Leftrightarrow d(a, y) > r$. Grâce à la deuxième forme d'inégalité triangulaire on trouve

$$-d(y, a) \leq d(y, x) - d(x, a) < \alpha - d(x, a) = d(x, y) - r - d(x, a)$$

ce qui donne $d(x, a) > r$, donc $B(x, \alpha) \subset C_E B_f(a, r)$.
Pour montrer que $S(a, r)$ est un fermé, il suffit de remarquer que $S(a, r) = C_E B(a, r) \cap B_f(a, r)$.

1.3.3 Intérieur, Adhérence , Frontière d'une partie

Intérieur, adhérence et frontière d'une partie

Définition 1.3.3. *Soient (E, d) un espace métrique, A une partie de E et $x \in E$.*

1- *On dit que x est un point intérieur de A, s'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$. L'ensemble de tous les points intérieurs de A est appelé l'intérieur de A, on le note $Int(A)$ ou A° .*

2- *On dit que x est un point extérieur de A, s'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset C_E^A$. L'ensemble de tous les points extérieurs de A est appelé l'extérieur de A, on le note $Ext(A)$.*

3- *On dit que x est un point adhérent à A, si pour $r > 0$ on a $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. L'ensemble de tous les points adhérents à l'ensemble A s'appelle l'adhérence ou fermeture de A et on le dénote par : $Adh(A)$ ou $\overline{A}$.*

Point d'accumulation, point de frontière et point isolé

Définition 1.3.4. 4- *On dit que x est un point d'accumulation ou valeur d'adhérence de A si x est un point adhérent à $A \setminus \{x\}$, autrement dit si pour $r > 0$ on a $B(x, r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. L'ensemble de tous les points d'accumulation de A est noté par A'. A' est appelé l'ensemble dérivé de A*

5- *On dit que x est un point frontière de A, s'il est adhérent à la fois à A et à $E\setminus A$. Autrement dit si pour tout $r>0$ on a :*

$$\begin{cases} B(x,r)\cap A \neq \emptyset; \\ B(x,r)\cap (E\setminus A) \neq \emptyset. \end{cases}$$

L'ensemble de tous les points frontière de A est appelé la frontière de A et on le note par $Fr(A)$.

6- *On dit que x est un point isolé de A, s'il existe $r>0$ tel que $B(x,r)\cap A=\{x\}$. L'ensemble des points isolés est noté par $Iso(A)$.*

Remarque 1.3.3. *D'après les définitions précédentes, on peut conclure que*

1- *L'intérieur de A est le plus grand ouvert (pour l'inclusion) contenu dans A, autrement dit*

$$Int(A)=\cup\{\mathcal{O},\mathcal{O}\text{est un ouvert},\mathcal{O}\subset A\}.$$

2- *L'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A, autrement dit*

$$\overline{A}=\cap\{\mathcal{F},\mathcal{F}\text{est un fermé et}\mathcal{F}\supset A\}.$$

3- $Fr(A)=\overline{A}\setminus Int(A)$.

4- $A'=\overline{A}\setminus Is(A)$

Exemple 1.3.3. 1- *Soient $E=\mathbb{R}$ muni par la distance usuelle, et $A=\mathbb{Q}\cap[0,1]$. On peut facilement trouver $Int(A)=\emptyset$, $\overline{A}=[0,1]$, $Fr(A)=\overline{A}\setminus Int(A)=[0,1]$, $A'=[0,1]$ et $Iso(A)=\overline{A}\setminus A'=\emptyset$.*

2- *Soit $A=[0,1[$. On a $A^\circ=]0,1[$, $\overline{A}=[0,1]$ et $Fr(A)=\{0,1\}$.*

3- $Int(\mathbb{Z})=\emptyset$,$\overline{\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}$, $Int(\mathbb{Q})=\emptyset$, $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$ *et* $Fr(\mathbb{Q})=\mathbb{R}$.

4- *Pour un espace topologique $(E,\mathscr{T})$ avec $E=\{1,2,3,4\}$,$\mathscr{T}=\{\emptyset,E,\{1,2\},\{3,4\}\}$. Soit $A=\{1,2,3\}$ une partie de E. Notons que $\mathscr{F}=\mathscr{T}$, $Int(A)$ est le plus grand ouvert contenu dans A, donc $Int(A)=\{1,2\}$, $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A, donc $\overline{A}=E$, la frontière de A est $Fr(A)=\overline{A}-Int(A)=\{3,4\}$. Pour trouver les points isolés. En effet, pour $x=1$ les ouverts contenants x sont E et $\{1,2\}$ de plus $A\cap E=A$ et $\{1,2\}\cap A=\{1,2\}$, donc $x=1$ n'est pas un point isolé. De même, on trouve que 2, 3 et 4 ne sont pas des points isolés de A, donc $Iso(A)=\emptyset$ et $A'=\overline{A}\setminus Iso(A)=E$.*

1.4 Topologie sur un ensemble

Définition 1.4.1. *Une **topologie** sur un ensemble E est une partie $\mathscr{T}$ de $\mathcal{P}(E)$ (l'ensemble de toutes parties de E) qui vérifie les propriétés suivantes :*

1 $\emptyset, E\in\mathscr{T}$.

2 *L'intersection de deux éléments de $\mathscr{T}$ est un élément de $\mathscr{T}$ c-à-d*

$$\forall A,B\in\mathscr{T} \Rightarrow A\cap B\in\mathscr{T}.$$

3 *La réunion (finie ou infinie) d'une famille d'éléments de $\mathscr{T}$ est un élément de $\mathscr{T}$.*

$$\forall (A_i)_{i\in I}\subset\mathscr{T}\Rightarrow \bigcup_{i\in I}A_i\in\mathscr{T}$$

Un espace topologique est le couple $(E, \mathscr{T})$. Les éléments de $\mathscr{T}$ sont appelés les ouverts de E.

Exemple 1.4.1. *1- Sur un ensemble E , il existe toujours deux topologies extrêmes la topologie discrète $\mathscr{T}_d = \mathcal{P}(E)$ et la topologie grossière $\mathscr{T}_g = \{\emptyset, E\}$.*

2- Soit $E = \{a, b\}$, on peut munir E par quatre topologies $\mathscr{T}_g = \{\emptyset, E\}, \mathscr{T}_d = \mathcal{P}(E), \mathscr{T}_1 = \{\emptyset, E, \{a\}\}$ et $\mathscr{T}_2 = \{\emptyset, E, \{b\}\}$.

3- $E = \mathbb{R}$ on munit $\mathbb{R}$ par la topologie

$$\mathscr{T}_u = \{A \subseteq \mathbb{R}; / \forall x \in A, \text{il existe} \quad a, b \in \mathbb{R} / a < x < b \quad \text{et} \quad]a, b[\subseteq A\}$$

c'est la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$.

1.4.1 Topologie induite par une distance

Définition 1.4.2. *Soit (E, d) un espace métrique, on définit la famille $\mathscr{T}_d \subset \mathcal{P}(E)$ par*

$$\left(\mathcal{O} \in \mathscr{T}_d\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathcal{O}, \exists r > 0 \ tq \ B(x, r) \subset \mathcal{O}\right).$$

$\mathscr{T}_d$ est une topologie sur E s'appelle topologie induite par la distance d. Les éléments $\mathcal{O}$ de $\mathscr{T}_d$ sont les ensembles ouverts pour la distance d.

1.4.2 Distances topologiquement équivalentes

Soient d_1 et d_2 deux distances définies sur E.

Définition 1.4.3. *On dit que d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes ssi elles sont engendrées la même topologie sur E càd elles ont les mêmes ouverts.*

Les voisinages dans un espace topologique

Définition 1.4.4. *Soit x un point de l'espace topologique $(E, \mathscr{T})$. On appelle voisinage de x toute partie V de E contenant un ouvert qui lui-même contient le point x càd*

$$(V \text{voisinage de } x) \Leftrightarrow (\text{il existe} \quad \mathcal{O} \in \mathscr{T} \text{et } x \in \mathcal{O} \subset V)$$

On note par $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

1.4.3 Base de topologie

Topologie engendrée

Définition 1.4.5. *Soient E un ensemble et $\mathcal{A}$ un ensemble de partie de E. L'intersection de toutes topologies qui contiennent $\mathcal{A}$ est appelée topologie engendrée par $\mathcal{A}$.*

Définition 1.4.6. *Soient E un ensemble non vide et $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$ deux topologies sur E. On dit que $\mathscr{T}_1$ est plus fine que $\mathscr{T}_2$ si $\mathscr{T}_2 \subset \mathscr{T}_1$ c-à-d tout ouvert de $\mathscr{T}_2$ est un ouvert de $\mathscr{T}_1$ et il existe au moins un ouvert de $\mathscr{T}_1$ qui n'est pas un ouvert de $\mathscr{T}_2$.*

Exemple 1.4.2. *La topologie induite par la distance discrète est plus fine que n'importe quelle topologie définie sur E.*

Définition 1.4.7. *Soit E un ensemble. Une base des ouverts sur E est un ensemble de parties de E noté $\mathfrak{B}$ tel que*

i- La réunion des éléments de $\mathfrak{B}$ est égale à E.

ii- L'intersection de deux éléments de $\mathfrak{B}$ est une réunion d'éléments de$\mathfrak{B}$.

Si $\mathfrak{B}$ est une base de topologie sur E qui engendre une topologie $\mathscr{T}$, on dit que $\mathfrak{B}$ est une base de topologie pour $\mathscr{T}$.

Exemple 1.4.3. *L'ensemble $\mathfrak{B} = \{[a,b[, (a,b) \in \mathbb{R}^2/a < b\} \cup \{\emptyset\}$ est une base de topologie sur $\mathbb{R}$ et la topologie $\mathscr{T}$ engendrée par $\mathfrak{B}$ est plus fine que la topologie usuelle $\mathscr{T}_u$. En effet*
$\forall x \in \mathbb{R}$ on a $x \in [x, x+1[$ donc $\mathbb{R} \subset \bigcup_{x\in\mathbb{R}}[x, x+1[$ et $\bigcup_{x\in\mathbb{R}}[x, x+1[\subset \mathbb{R}$ ce qui implique que $\mathbb{R} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}}[x, x+1[$ de plus $\forall \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathfrak{B} \Longrightarrow \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \in \mathfrak{B}$. Pour démontrer que $\mathscr{T}$ la topologie engendrée par $\mathfrak{B}$ est plus fine que $\mathscr{T}_u$ il suffit de trouver un ouvert pour $\mathscr{T}$ qui n'est pas pour $\mathscr{T}_u$. En effet $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $]x, x+1[= \bigcup_{n\geq N_0}[x+\frac{1}{n}, x+1[$ avec N_0 assez grand donc tout ouvert pour $\mathscr{T}_u$ est un ouvert pour la topologie engendrée par $\mathfrak{B}$ mais $[x, x+1[$ n'est pas un ouvert pour $\mathscr{T}_u$

Proposition 1.4.1. *Soient E un ensemble, $\mathcal{O}$ une partie de E et $\mathfrak{B}$ une base de la topologie $\mathscr{T}$ sur E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1 $\mathcal{O} \in \mathscr{T}$

2 *Il existe une famille $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathfrak{B}$ telle que $\mathcal{O} = \bigcup_{i\in I}\mathcal{O}_i$.*

3 *Pour tout $x \in \mathcal{O}$, il existe $A \in \mathfrak{B}$ tq $x \in A \subset \mathcal{O}$.*

Proposition 1.4.2. *Une partie A d'un espace métrique (E,d) est ouverte ssi A est l'union de toutes les boules ouvertes contenues dans A.*

Preuve 3. $\Rightarrow$? *Supposons que A une partie ouverte et montrons que $A = \cup_{a\in A}B(a,r_a)$ avec $B(a,r_a) \subset A$. De la supposition $\forall a \in A$, il existe $r_a > 0$ tel que $B(a,r_a) \subset A$, donc $\cup_{a\in A}B(a,r_a) \subset A$. Mais on a $A = \cup_{a\in A}\{a\}$ ce qui implique $A \subset \cup_{a\in A}B(a,r_a)$. D'où l'implication.*
$\Leftarrow$? *Supposons que $A = \cup_{a\in A}B(a,r_a)$ et montrons que A est ouverte. Soit $x \in A$, donc il existe $a_0 \in A$ tel que $x \in B(a_0, r_{a_0})$ ce qui donne $d(a_0,x) < r_{a_0}$, il suffit de prendre $r_x = r_{a_0} - d(a_0,x)$ et on a $B(x,r_x) \subset B(a_0,r_{a_0}) \subset \cup_{a\in A}B(a,r_a) = A$. D'où le résultat.*

Remarque 1.4.1. *- La famille des boules ouvertes constitue une base pour les ouverts de $(E,\mathscr{T}_d)$.*

$$\Big(\mathcal{O} \in \mathscr{T}_d\Big) \Leftrightarrow \Big(\forall x \in \mathcal{O}\ \exists B\ /x \in B \subset \mathcal{O}\Big).$$

- La famille des boules $(B(x,r))_{r\in\mathbb{R}_+^*}$ est une base de voisinage de x.

- La famille des boules $(B(x,\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base dénombrable de voisinage de x.

Espace topologique séparé

Définition 1.4.8. *Soit $(E,\mathscr{T})$ un espace topologique. On dit que E est séparé si pour tout x,y de E tel que $x \neq y$ il existe V_x voisinage de x et V_y voisinage de y tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$.*

Proposition 1.4.3. *Tout espace métrique est séparé.*

Preuve 4. *Exercice.*

Remarque 1.4.2. *Dans un espace séparé si une limite existe elle est unique.*

1.4.4 Densité et séparabilité

Définition 1.4.9. *Soient $(E,\mathscr{T})$ un espace topologique et A une partie de E . On dit que A est partout dense dans E si $Adh(A)$ coïncide avec E.*

Définition 1.4.10. *On dit que A est dénombrable s'il existe une bijection f de A dans $\mathbb{N}$*

Définition 1.4.11. *Un espace topologique E est dit séparable s'il possède un sous ensemble A dénombrable partout dense dans E.*

Exemple 1.4.4. $(\mathbb{R},\mathscr{T}_u)$ *est séparable, car il admet un ensemble $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ dénombrable et $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$*

Théorème 1.4.1. $(E,\mathscr{T}_d)$ *est séparable ss'il existe une base dénombrable pour les ouverts de $\mathscr{T}_d$.*

Preuve 5. $\Rightarrow$? *Supposons que l'espace métrique (E,d) est séparable et montrons qu'il existe une base dénombrable. E est séparable, donc il existe $D\subset E$ dénombrable et dense dans E. Soit $\mathcal{B}=\{B(x,r),\ x\in D \text{ et } r\in\mathbb{Q}\}$,remarquons que $\mathcal{B}$ est dénombrable, donc peut être énumérée en une suite $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il suffit démontrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathscr{T}_d$.*
Soient $O\in\mathscr{T}_d$ et $I=\{n\in\mathbb{N}\ /\ O_n\subset O\}$, donc $\underset{n\in I}{\cup}O_n\subset O$. Montrons maintenant que $O\subset\underset{n\in I}{\cup}O_n$, soit $x\in O$, $\exists\delta>0$ tel que $B(x,\delta)\subset O$. Soient $a\in D$ et $r\in\mathbb{Q}$ tel que $2r<\delta$ et $d(x,a)<r$. Montrons que $B(a,r)\subset B(x,\delta)\subset O$. Soit $y\in B(a,r)$ on a $d(x,y)\leq d(x,a)+d(a,y)<r+r=2r<\delta$. Donc il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $O_{n_0}=B(a,r)$. Alors $\exists O_{n_0}$ tel que $x\in O_{n_0}\subset\underset{n\in I}{\cup}O_n$, ce qui implique que $O\subset\underset{n\in I}{\cup}O_n$.
$\Leftarrow$? *Supposons qu'il existe une base dénombrable de $\mathscr{T}_d$, et montrons que E est séparable. Soit $\mathcal{B}=\{O_n\ /\ n\in\mathbb{N}\}$ la base dénombrable. Pour Chaque $n\in\mathbb{N}$ tel que $O_n\neq\emptyset$, il existe $x_n\in O_n$. Soit $D=\{x_n\ /\ n\in\mathbb{N}\}$ montrons que D est dense dans E c-à-d $\forall x\in E$ et $\forall V\in\mathcal{V}(x)\Rightarrow V\cap D\neq\emptyset$.*
Soit $B(x,\varepsilon)$ un voisinage quelconque de x, donc il existe $I\subset\mathbb{N}$ tel que $B(x,\varepsilon)=\underset{n\in I}{\cup}O_n$, alors il existe au moins $n_0\in I$ tel que $x_{n_0}\in B(x,\varepsilon)\Rightarrow B(x,\varepsilon)\cap D\neq\emptyset$.

1.4.5 Convergence d'une suite dans un espace métrique

Définition 1.4.12. *Soient (E,d) un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset E$ et $x\in E$. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x si*

$$\lim_n x_n=x\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N}\ tq\ \forall n\geq n_0\Rightarrow x_n\in B(x,\varepsilon)\tag{1.2}$$

Proposition 1.4.4. *Soient (E,d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset E$*

$$(\lim_n x_n=x)\Leftrightarrow(\lim_n d(x_n,x)=0)$$

Preuve 6. $\Rightarrow$? *Supposons que*

$$\begin{aligned}\lim_n x_n &= x\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N}\ tq\ \forall n\geq n_0\Rightarrow x_n\in B(x,\varepsilon)\\ &\Rightarrow d(x_n,x)<\varepsilon\Rightarrow\lim_n d(x_n,x)=0\end{aligned}$$

$\Leftarrow$? *Supposons que*

$$\lim_n d(x_n,x)=0\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N}\ tq\ \forall n\geq n_0\Rightarrow d(x_n,x)<\varepsilon$$

Soit $V\in\mathcal{V}(x)$, donc il existe $\varepsilon>0$ tq $B(x,\varepsilon)\subset V$. d'après l'équivalence précédent, il existe $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tq $\forall n\geq n_0\Rightarrow d(x_n,x)<\varepsilon$ ce qui implique que $x_n\in B(x,\varepsilon)\subset V$

Proposition 1.4.5. *Soit (E,d) un espace métrique, $A \subset E$*

$$\begin{aligned}(x \in \overline{A}) \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \;\; tq \;\; \lim_n x_n = x \;\; (dans\ \mathcal{T}_d))\\ &\Leftrightarrow \quad (\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \;\; tq \;\; \lim_n d(x_n,x) = 0).\end{aligned}$$

Preuve 7. *Soit $x \in \overline{A}$, donc $\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset$. donc pour la base des voisinages $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow B(x,\frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_n \in B(x,\frac{1}{n}) \cap A$ tel que $d(x_n,x) < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_n d(x_n,x) = 0$.*

Inversement. Supposons qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ telque $\lim_n x_n = x$. Soit $V \in \mathcal{V}(x)$ comme la famille des boules ouvertes est une base de voisinage $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $B(x,\frac{1}{n_0}) \subset V$ mais on a $\forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in B(x,\frac{1}{n_0})$ ce qui donne $A \cap V \neq \emptyset$.

1.4.6 Continuité d'une application entre deux espaces métriques

Proposition 1.4.6. *Soient $(E,\mathcal{T}_d)$, $(F,\mathcal{T}_{d'})$ deux espaces métriques et f une application de E dans F. Soit $x_0 \in E$, alors on a l'équivalence suivante :*

$$(f \;\; est\ continue\ au\ point\ x_0) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0\ tq\ \forall x \in E\ si\ d(x,x_0) < \alpha \Rightarrow d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon)$$

Preuve 8. *$\Rightarrow$? Supposons que f est continue au point x_0. Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in E$ tel que $d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0),\varepsilon)$, comme f est continue on a $f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))$ est un voisinage de x_0, donc il existe α tel que $B(x_0,\alpha) \subset f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))$ ce qui donne $d(x,x_0) < alpha \Rightarrow d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$*
$\Leftarrow$? Supposons que $(\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tq $\forall x \in E$ si $d(x,x_0) < \alpha \Rightarrow d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$ et montrons que f est continue au point x_0. Soit V un voisinage de $f(x_0)$ quelconque, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(x_0),\varepsilon) \subset V$. D'après la supposition il existe $\alpha > 0$ tel que $f((B(x_0,\alpha)) \subset B(f(x_0),\varepsilon)$.

Applications uniformément continues et k-Lipschitziennes

Définition 1.4.13. *Soient $(E,\mathcal{T}_d)$, $(F,\mathcal{T}_{d'})$ deux espaces métriques et f une application de E dans F*

1. *On dit que f est uniformément continue ssi*

$$(f \;\; est\ uniformément\ continue\ ) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0\ tq\ \forall x,y \in E\ si\ d(x,y) < \alpha \Rightarrow d'(f(x),f(y)) < \varepsilon)$$

2. *On dit que f est $k-Lipschitzienne$ ssi*

$$\exists k \geq 0\ tel\ que\ \forall x,y \in E\ on\ \ a\ d'(f(x),f(y)) \leq kd(x,y)$$

3. *On dit que f est homéomorphisme ssi f est continue, bijective et f^{-1} est continue.*

Exemple 1.4.5. *Soient $(E,\mathcal{T}_d)$ un espace métrique et $y \in E$, l'application f_y telle que*

$$f_y : E \to \mathbb{R}^+; \qquad x \mapsto f_y(x) = d(x,y)$$

est continue sur E, de plus elle est 1-lipschitzienne car pour tout x,x' on a

$$|f_y(x) - f_y(x')| = |d(x,y) - d(x',y)| \leq d(x,x')$$

Exercice 1.4.1. *Soit A une partie de (E,d) montrer que l'application g_A définit par*

$$g_A : E \to \mathbb{R}^+; \qquad x \mapsto g_A(x) = d(x,A)$$

est 1-lipschitzienne.

Valeur d'adhérence d'une suite

Définition 1.4.14. *Soient $(E,\mathcal{T}_d)$ un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ et $x \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons $A_n = \{x_k / \ k \geq n\}$. x est appelé valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $B(x,\varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$.*

Exemple 1.4.6.
1. *La limite d'une suite convergente est une valeur d'adhérence.*
2. *Si $E = \mathbb{R}$ muni de la distance usuelle et $x_n = (-1)^n$ les valeurs 1 et -1 sont des valeurs d'adhérences .*

Remarque 1.4.3. *L'ensemble A de tous les valeurs d'adhérence d'une suite $(x_n)_n$ c'est un ensemble fermé (car $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n$).*

Sous suite

Définition 1.4.15. *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E et φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que $n \to \varphi(n) = n_k$. La suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle une sous suite (suite extraite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$).*

1.5 Suites de Cauchy et les espaces complets

1.5.1 Suites de Cauchy

Définition 1.5.1. *Soient $(E,\mathcal{T}_d)$ un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy ssi*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \ tq\ \ \forall p,q \in \mathbb{N}\ avec\ p \geq n_0,\ q \geq n_0 \Rightarrow d(x_p,x_q) < \varepsilon.$$

Proposition 1.5.1. *Soit $(E,\mathcal{T}_d)$ un espace métrique. On a les propriétés suivantes :*
1. *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente dans E $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de Cauchy dans E.*
2. *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de Cauchy dans E $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.*

Preuve 9. *Exercice.*

Remarque 1.5.1. *La réciproque de proposition précédente est fausse, comme le montrer l'exemple suivant*

Exemple 1.5.1.
1- *Soient (u_n) et (v_n) deux suites dans $\mathbb{R}$ telles que $u_n = (-1)^n$ et $v_n = \cos n$. $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont des suites bornées mais ne sont pas de Cauchy.*
2- *Si on prend la suite $x_n = \frac{1}{n}$ dans l'espace $]0,1]$ muni de la topologie de trace de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ on trouve que (x_n) est de Cauchy mains n'est pas convergente.*

Proposition 1.5.2. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans un espace métrique $(E,\mathcal{T}_d)$. S'il existe une sous suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers un élément $x \in E$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers x.*

Preuve 10. *Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, alors $\forall \varepsilon > 0; \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p > q \geq n_0$ on a $d(x_p,x_q) < \frac{\varepsilon}{2}$. De plus $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers x conduit à $\forall \varepsilon > 0, \exists\ n_1 \in \mathbb{N}\ tq\ \forall \varphi(n) \geq n_0 \Rightarrow d(x_{\varphi(n)},x) < \frac{\varepsilon}{2}$, donc pour $n, \varphi(n) \geq \max\{n_0,n_1\}$, on trouve*

$$d(x_n,x) \leq d(x_n,x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)},x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Proposition 1.5.3. *Soient $(E,\mathcal{T}_d)$ un espace métrique, $x \in E$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E. x est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ss' il existe une sous suite $(x_{k_n})_n$ converge vers x.*

Preuve 11. *Soit x valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\varepsilon > 0$ on a $B(x,\varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$. On construit une sous suite (x_{p_n}) de (x_n) de la manière suivante :*
Pour $\varepsilon = 1$,et $n = 1$ il existe $x_{p_1} \in B(x,1) \cap A_1$ et $p_1 \geq 1$.
Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et $n = p_1 + 1$ il existe $x_{p_2} \in B(x,\frac{1}{2}) \cap A_{p_1+1}$ et $p_2 > p_1$.
De la même façon, on construit la sous suite $x_{p_1}, x_{p_2}, ..., x_{p_n}, ...$ telle que $x_{p_n} \in B(x,\frac{1}{n}) \cap A_{p_n-1}$ ce qui conduit à $d(x_{p_n},x) < \frac{1}{n}$ qui implique $x_{p_n} \to x$.
Inversement supposons qu'il existe $(x_{p_n})_n \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_{p_n} \to x$, et montrons que $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $B(x,\varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$. En effet soit $\varepsilon > 0$, de la convergence de sous suite il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p_n \in \mathbb{N}$ et $p_n \geq n_0 \Rightarrow x_{p_n} \in B(x,\varepsilon)$, ce qui donne $\forall n \geq n_0$ on a $B(x,\varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$. Pour $n \leq n_0$ en utilisant la décroissance de la suite (A_n), on trouve $A_{n_0} \subset A_n \forall n \leq n_0$ donc $A_n \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$.

1.6 Complétude

Définition 1.6.1. *Un espace métrique E est dit complet si toute suite de Cauchy est convergente.*

Exemple 1.6.1. *L'espace* $(\mathbb{R},|.|)$ *est complet.*

Proposition 1.6.1. *Un sous espace complet d'un espace métrique est fermé dans E.*

Preuve 12. *Soit X un sous espace complet de l'espace métrique E, on va montrer que X est fermé. En effet soit $x \in \overline{X}$, il existe alors une suite $(x_n) \subset X$ tel que (x_n) tend vers x, ce qui donne (x_n) est de Cauchy dans X, mais X est complet donc elle converge dans X on déduit que $x \in X \Rightarrow \overline{X} \subset X$ d'autre part $X \subset \overline{X}$, donc X est fermé.*

Proposition 1.6.2. *Tout sous espace fermé X d'un espace complet E est complet.*

Preuve 13. *Soit X un espace fermé de l'espace complet E. On va montrer que X est complet. En effet soit (x_n) une suite de Cauchy dans $X \subset E$, en utilisant la complétude de E on trouve que (x_n) converge vers $x \in E$ d'après* (1.4.5)*, on obtient $x \in \overline{X} = X$ ce qui implique X est complet.*

Proposition 1.6.3. *Un produit fini ou dénombrable d'espaces complets est complet.*

Définition 1.6.2. *Soit E un espace métrique et f une application de E dans E. On dit que f est contractante si*

$$\exists \kappa \in]0,1[, \ \ \forall (x,y) \in E^2 \Rightarrow d(f(x),f(y)) \leq \kappa d(x,y).$$

Exemple 1.6.2. *Soit $E = ([\frac{2}{3},\infty[,|.|)$ uns sous espace de $(\mathbb{R},|.|)$ et f une fonction de E dans $\mathbb{R}$ définit par*

$$f(x) = \frac{2x+6}{3x+2}$$

f est lipschitzienne car $\sup_{x\in E}|f'(x)| = \sup_{x\in E}|\frac{-14}{(3x+2)^2}| \leq \frac{14}{16} < 1$.

Théorème 1.6.1. ***Théorème de point fixe*** *Si f est contractante sur un espace métrique complet E, alors f admet un point fixe c-à-d il existe $\overline{x} \in E$ tel que $f(\overline{x}) = \overline{x}$.*

Preuve 14. ***Unicité***

Soit $\overline{x},\overline{y}$ deux points de E tel que $\overline{x} \neq \overline{y}$ et $\overline{x} = f(\overline{x})$ et $\overline{y} = f(\overline{y})$, donc $d(\overline{x},\overline{y}) = d(f(\overline{x}), f(\overline{y})) < d(\overline{x},\overline{y})$, c'est contradiction.

Existence

Soit x_0 un point quelconque de E, on définit la suite $(x_n)_n$ dans E par $x_{n+1} = f(x_n)$. On a

$$\begin{array}{rcl} d(x_2,x_1) & \leq & \kappa d(x_1,x_0) \\ d(x_3,x_2) & \leq & \kappa d(x_2,x_1) \leq \kappa^2 d(x_1,x_0) \\ & \vdots & \\ d(x_{n+1},x_n) & \leq & \kappa d(x_n,x_{n-1}) \leq \kappa^n d(x_1,x_0) \end{array}$$

pour $p,q \in \mathbb{N}$ tel que $p > q \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $p = q+n$, donc

$$\begin{array}{rcl} d(x_p,x_q) & = & d(x_{q+n},x_q) \leq d(x_{q+n},x_{q+n-1}) + d(x_{q+n-1},x_{q+n-2}) + ... + d(x_{q+1},x_q) \\ & \leq & (\kappa^{n-1} + \kappa^{n-2} + ... + \kappa + 1)\kappa^q d(x_1,x_0) \\ & \leq & \dfrac{\kappa^q}{1-\kappa} d(x_1,x_0) \end{array}$$

donc

$$\lim_{q\to\infty} d(x_{q+n},x_q) = \lim_{q\to\infty} \frac{\kappa^q}{1-\kappa} d(x_1,x_0) = 0$$

Donc $(x_n)_n$ est de Cauchy dans un espace complet, elle est convergente. Il existe $\overline{x} \in E$ tel que

$$\overline{x} = \lim x_n = \lim f(x_{n-1}) = f(\overline{x}).$$

Exemple 1.6.3. *On prend les mêmes données de l'exemple (1.6.2) et montrons que f admet un seul point fixe. Pour démontrer ça il faut démontrer que E est complet et $f(E) \subset E$. On a E est complet car il est fermé dans un complet, donc il est complet . Ce qui concerne $f(E) \subset E$ on a $f'(x) = \frac{-14}{(3x+2)^2} < 0$, ce qui implique f est décroissante et $f(E) =]\lim_{x\to\infty} f(x), f(\frac{2}{3}] =]\frac{2}{3}, \frac{11}{6}] \subset E$, donc f vérifie tous les conditions du Théorème (1.6.1). En utilisant le Théorème (1.6.1) il existe alors $\overline{x} = f(\overline{x}) \Rightarrow \overline{x} = \sqrt{2}$.*

Remarque 1.6.1. *Toutes les hypothèses du Théorème (1.6.1) sont nécessaire, comme le montre l'exemple suivant.*

Exemple 1.6.4.

1. *Si $E =]0,1[$ et $f(x) = \frac{x}{2}$. f n'admet pas un point fixe car E n'est pas complet.*
2. *Si $E = [0,1]$ et $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ f n'admet pas un point fixe car $f(E) \subsetneq E$.*
3. *Si E un espace métrique complet quelconque et $f(x) = x$, tout les points est fixe car f n'est pas contractante.*