Introduction à la Topologie
L2 Maths — Chapitre 1

A. Hanachi

Université Batna 2
Département de Mathématiques

13 décembre 2020

Un aperçu historique

Les espaces métriques sont introduits par M. Frechet en 1906, peu de temps après, F. Haussdroff les développez. L'idée de ces espaces est née à l'analyse des principales propriétés de la distance usuelle. L'extension des propriétés de l'espace euclidien aux espaces métriques introduit un langage géométrique dans de nombreuses questions d'analyse et de théorie des nombres (comme les voisinages, la limite et la continuité, ..).
L'étude des espaces métriques est une excellente introduction à la topologie générale.

Distance sur un ensemble

Définition 1.1 (Distance sur un ensemble)

Soit E un ensemble non vide. On appelle distance toute application

$$d : E \times E \to \mathbb{R}^+ \quad (x,y) \to d(x,y) \geq 0$$

telle que

1- $\forall (x,y) \in E^2, \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$

2- $\forall (x,y) \in E^2, \quad d(x,y) = d(y,x)$ *symétrie*

3- $\forall (x,y,z) \in E^3, \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, *la 1^{ere} inégalité triangulaire.*

le couple $(E;d)$ s'appelle un espace métrique. .

Exemples

Exemple 1.1

1- *On muni* $\mathbb{R}$ *de la distance usuelle* $d(x,y) = |x-y|$ *avec* $x,y \in \mathbb{R}$

2- *Soit* E *un ensemble quelconque non vide. Pour tout* $x,y \in E$, *on pose*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y \end{cases}$$

$(E;d)$ *est un espace métrique,* d *s'appelle distance discrète sur* E.

Exemples

Exemple 1.2

3- *Soit* $E = \mathbb{R}^n$ *on définit les distances suivantes :*
$\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ *avec* $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *et* $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$

$$\begin{aligned} d_1(X,Y) &= \sum_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| \\ d_2(X,Y) &= \sqrt{\sum_{1\leq i\leq n} (x_i - y_i)^2} \\ d_\infty(X,Y) &= \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| \end{aligned}$$

Propriétés d'une distance

Proposition 1.1 (Propriétés d'une distance)

Soit (E,d) un espace métrique. Les assertions suivantes sont satisfaites

i- $\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in E^n$ *on a*

$$d(x_1, x_n) \leq \sum_{1 \leq i \leq n-1} d(x_i, x_{i+1})$$

ii- $\forall (x, y, z) \in E^3$, *on a*

$$|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y) \tag{0.1}$$

c'est la 2^{eme} inégalité triangulaire.

La preuve

Preuve 1.1

L'assertion i) est une application directe du 1^{ere} *inégalité triangulaire de la définition. Pour démontrer ii) il suffit démontrer que :*

$$-d(x,y) \leq d(x,z) - d(z,y) \leq d(x,y); \quad \forall (x,y,z) \in E^3 \tag{0.2}$$

Du 1^{ere} *inégalité triangulaire on a*
$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \Rightarrow d(x,z) - d(z,y) \leq d(x,y)$.
De plus $d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) \Rightarrow -d(x,y) \leq d(x,z) - d(z,y)$
combinant les deux dernières inégalités on obtient (0.2).

Exercices d'application

Exercice 1.1

Soit $E = C([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles. On définit sur E l'application d par :
$\forall f,g \in E; \quad d(f,g) = max_{a\leq x\leq b}|f(x) - g(x)|$. *Montrer que d est une distance sur E.*

Exercice 1.2

Considérons le même ensemble E, et on définit l'application d par :
$\forall f,g \in E; \quad d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$. *Montrer que d est une distance sur E.*

Exercice 1.3

Soit d une distance sur E. Montrer que $\delta = \frac{d}{1+d}$ est une distance

Solution d'exercice 1.1 (Solution d'exercice 1)

Rappelons d'une part que toute fonction continue sur un borné est bornée de plus atteint sa borne, d'autre part la différence entre deux fonctions continues est continue. Donc d est bien définie. On passe maintenant à la démonstration du 3^{eme} *points de la définition.*

1- *Soit* f, g *deux éléments qlqs de* E *tel que* $d(f,g) = 0$, *donc* $max_{a \leq x \leq b}|f(x) - g(x)| = 0$, *comme la fonction* $|f(x) - g(x)|$ *est positive et* $|f(x) - g(x)| \leq max_{a \leq x \leq b}|f(x) - g(x)|$ *pour tous* $x \in [a,b]$, *on trouve* $|f(x) - g(x)| = 0 \quad \forall x \in [a,b]$ *grâce aux propriétés de la valeur absolue sur* $\mathbb{R}$ *on trouve* $f(x) - g(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$, *donc* $f \equiv g$.

2- *Grâce à la symétrie du valeur absolue sur* $\mathbb{R}$, *on trouve* $d(f,g) = d(g,f)$.

Solution d'exercice 1.2 (La suite de solution)

3- $\forall f, g, h \in E$, *on a*
$|f(x)-g(x)| = |f(x)-h(x)+h(x)-g(x)| \leq |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|$,
d'où le résultat

Combinant les trois propriétés,on trouve que d *est une distance sur* E.

Solution d'exercice 1.3 (Solution d'exercice 2)

Pour le 2^{eme} *exercice, on suit la même méthode que l'exercice 1.*

Solution d'exercice 1.4 (Solution d'exercice 3)

Pour le 3^{eme} exercice, il suffit démontrer l'inégalité triangulaire.
En effet
Notons que

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 1 - \frac{1}{1+d(x,y)},$$

de plus

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y),$$

donc

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq 1 - \frac{1}{1+d(x,z)+d(z,y)}.$$

Par l'unification les dénominateurs, on trouve le résultat.

Distance entre deux parties et diamètre

Définition 1.2 (Distance entre deux parties)

Soient A et B deux parties non vides d'un espace métrique (E,d). On définie la distance entre les deux parties A et B par

$$dist(A,B) = \inf_{x\in A; y\in B} d(x,y)$$

Remarque 1.1

1- *Si $A = \{a\}$, on trouve $d(a,B) = \inf_{y\in B} d(a,y)$.*

2- *Si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $dist(A,B) = 0$.*

3- *L'application dist : $\mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ dans $\mathbb{R}^+$ n'est pas une distance sur $\mathcal{P}(E)$.*

Distance entre deux parties et diamètre

Définition 1.3 (Diamètre)

Le diamètre d'un sous ensemble non vide A de E est le nombre réel positif

$$diam(A) = \sup_{x,y\in A} d(x,y)$$

.

On dit que A est borné si $diam(A) < \infty$.

Exemples

1- Soient $(\mathbb{R}, d_u)$, $A =]-\infty, 2]$ et $B = [2, 4]$. La distance entre A et B est $dist(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y) = d(2, 2) = 0$.

2- On muni $\mathbb{R}$ par la distance discrète c-à-d $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telle que

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y \end{cases}$$

Soit $A = \{a\}$ et B une partie non vide de $\mathbb{R}$. Donc

$$dist(A,B) = \inf_{y \in B} d(a,y) = \begin{cases} 0 & si\ a \in B \\ 1 & sinon \end{cases}$$

Exemples

3- Soit $(\mathbb{R}^2, d_2)$, avec d_2 est la distance Euclidienne (voir ci dessous) sur $\mathbb{R}^2$. Si A est le triangle de sommets $(0,0),(0,1)$ et $(2,0)$. Le diamètre de A est

$$
\begin{aligned}
diam(A) &= \sup_{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A} d_2\Big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\Big) \\
&= \sup_{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A} \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \\
&= d_2\Big((0,1),(2,0)\Big) = \sqrt{5}.
\end{aligned}
$$

Distance induite, Distance produit

Définition 1.4 (Distance induite)

Soient (E, d_E) *un espace métrique et* A *une partie de* E*. On définit la restriction* $d_A : A \times A \to \mathbb{R}^+$ *telle que* $\forall (x,y) \in A^2 \quad d_A(x,y) = d_E(x,y)$. d_A *est la distance induite par* d_E *sur* A *et* (A, d_A) *est un sous espce métrique de* (E, d_E)

Définition 1.5 (Distance produit)

Soient (E_1, d_{E_1}) *et* (E_2, d_{E_2}) *deux espaces métriques. On peut définir des distances sur l'espace produit* $E = E_1 \times E_2$ *comme suit :* $\forall X = (x_1, y_1), Y = (x_2, y_2) \in E$

$$d_1(X,Y) = d_{E_1}(x_1,x_2) + d_{E_2}(y_1,y_2);\ d_2(X,Y) = \sqrt{d_{E_1}(x_1,x_2)^2 + d_{E_2}(y_1,y_2}$$

$$d_\infty(X,Y) = \max\{d_{E_1}(x_1,x_2), d_{E_2}(y_1,y_2)\}.$$

Boule ouverte, fermée et la sphère

Définition 2.1 (Boule ouverte, fermée et la sphère)

Soient (E, d) *un espace métrique,* $a \in E$ *et* $r > 0$.

1- *La* *boule ouverte* *de rayon* r *et de centre* a *est défini par :*

$$B(a, r) = \{x \in E, / d(x, a) < r\}.$$

2- *La* *boule fermée* *de rayon* $r > 0$ *et de centre* a *est défini par :*

$$B_f(a, r) = \{x \in E, / d(x, a) \leq r\}.$$

3- *La* *sphère* *de centre* a *et de rayon* r *est défini par :*

$$S(a, r) = \{x \in E, / d(x, a) = r\}.$$

Exemples

Remarque 2.1

Remarquons que $B_f(a,r) = B(a,r) \cup S(a,r)$

Exemple 2.1

- *Soit* d_u *la distance usuelle sur* $\mathbb{R}$*. On a*
  - a- *La boule ouverte de centre* a *et de rayon* r *est*

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}, / |x-a| < r\} =]a-r, a+r[$$

  - b- *La boule fermée de centre* a *et de rayon* r *est*

$$b_f(a,r) = \{x \in \mathbb{R}, / |x-a| leqr\} = [a-r, a+r]$$

  - c- *La sphère de centre* a *et de rayon* r *est*

$$S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}, / |x-a| = r\} = \{a-r, a+r\}.$$

Exemples

Exemple 2.2

- *Si d est la distance discrète sur* $\mathbb{R}$*, on trouve*
  $B_f(a,r) = B(a,r) = \{a\}$ *et* $S(a,r) = \emptyset$ *si* $0 < r < 1$.
  $B_f(a,r) = E, \quad B(a,r) = \{a\}$ *et* $S(a,r) = E \setminus \{a\}$ *si* $r = 1$.
  $B_f(a,r) = B(a,r) = E$ *et* $S(a,r) = \emptyset$ *si* $r > 1$.

Remarque 2.2

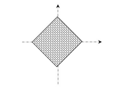
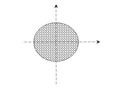
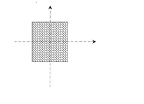
De l'exemple précédent, on constate que les boules diffèrent selon la distance définie sur l'ensemble.

Remarques

Remarque 2.3

Les boules ne sont pas toujours rondes , ceci est illustré par les figures de l'exemple suivant :
Dans $\mathbb{R}^2$ les boules fermées de centre 0 et de rayon 1 sont :

$$\begin{aligned}
B_{d_1}(0,1) &= \{X=(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,d_1(X,0)<1\}=\{X\in\mathbb{R}^2\,/|x|+|y|<1\}.\\
B_{d_2}(0,1) &= \{X=(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,d_2(X,0)<1\}=\{X\in\mathbb{R}^2\,/\sqrt{x^2+y^2}<1\}\\
B_{d_\infty}(0,1) &= \{X=(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,d_\infty(X,0)<1\}=\{X\in\mathbb{R}^2\,/\max\{|x|,|y|\}<
\end{aligned}$$

		
$B_f^1(0,1)$	$B_f^2(0,1)$	$B_f^\infty(0,1)$