Corrigé type de la serie N° 3.

Exo 1 Soit le schéma numérique suivant :

$$(S1)\begin{cases} y_0 \text{ donné} \\ \dfrac{y_{k+1}-y_k}{h_k} = \dfrac{1}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + h_k f(t_k, y_k))\right]. \end{cases}$$

du pb de Cauchy $(PC)\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

avec $f \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et y la solution maximale de (PC). On a $N \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 \dots < t_N = T$ et $h_k = t_{k+1} - t_k$ $\forall k \in \{0, \dots, N-1\}$.

Montrons que (S1) est convergent d'ordre 2. Pour simplifier l'étude supposons que $h_k = h$ est fixé, donc $t_{k+1} = t_k + h$ avec $h = \dfrac{T}{N}$.

Le schéma (S1) s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} y_0 \text{ donné} \\ \dfrac{y_{k+1}-y_k}{h} = \dfrac{1}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_k + h, y_k + h f(t_k, y_k))\right] \end{cases}$$

$$= \phi(t_k, y_k, h) \text{ avec}$$

$$\phi : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times [0, h_0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(t, y, h) \longmapsto \phi(t, y, h) = \frac{1}{2}\left[f(t, y) + f(t + h, y + h f(t, y))\right].$$