

on a $\sum_{i=0}^2 \alpha_i = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = -1 + 0 + 1 = 0$, avec $\alpha_0 = -1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$

$$\sum_{i=0}^2 i \alpha_i = 0 \alpha_0 + 1 \cdot \alpha_1 + 2 \alpha_2 = 2 \alpha_2 = 2.$$

$$\sum_{i=0}^2 B_i = B_0 + B_1 + B_2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2 = \sum_{i=0}^2 i \alpha_i, \quad \begin{matrix} B_0 = \frac{1}{3} \\ B_1 = \frac{4}{3} \\ B_2 = \frac{1}{3} \end{matrix}$$

$$\sum_{i=0}^2 i^2 \alpha_i = 4 \alpha_2 = 4, \quad 2 \sum_{i=0}^2 i B_i = 2(0 B_0 + 1 B_1 + 2 B_2) = 2\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right) = 4 = \sum_{i=0}^2 i^2 \alpha_i.$$

$$\sum_{i=0}^2 i^3 \alpha_i = 8 \alpha_2 = 8, \quad 3 \sum_{i=0}^2 i^2 B_i = 3(0 \cdot B_0 + 1 \cdot B_1 + 4 B_2) = 3\left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right) = 8 = \sum_{i=0}^2 i^3 \alpha_i$$

$$\sum_{i=0}^2 i^4 \alpha_i = 16 \alpha_2 = 16, \quad 4 \sum_{i=0}^2 i^3 B_i = 4(0 \cdot B_0 + 1 \cdot B_1 + 8 B_2) = 4\left(\frac{4}{3} + \frac{8}{3}\right) = 16 = \sum_{i=0}^2 i^4 \alpha_i$$

$$\sum_{i=0}^2 i^5 \alpha_i = 32 \alpha_2 = 32, \quad 5 \sum_{i=0}^2 i^4 B_i = 5(0 \cdot B_0 + 1 \cdot B_1 + 16 B_2) = 5\left(\frac{4}{3} + \frac{16}{3}\right) = \frac{100}{3} \neq 32$$

Donc le schéma est consistant d'ordre 4, comme il est linéaire donc il est stable. Grâce à théorème de convergence, on trouve que le schéma de Runge-Kutta converge d'ordre 4.

Les coefficients sont les mêmes que pour la formule de Simpson

puisque le schéma est obtenu à l'aide de la formule suivante

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} P(t) dt \text{ avec } P(t) \text{ est le polynôme}$$

d'interpolation de Lagrange de degré 2 pour les couples de valeurs (t_{n+1-i}, f_{n+1-i}) $0 \leq i \leq 2$, en calculant l'intégrale par la méthode de Simpson.