C'est un schéma explicite à un pas, il est converge ssi il est stable et consistant, et soit d'ordre 2 si l'ordre de consistance est égal à 2. On applique les critères de consistance et de stabilité

a)- Consistance du schéma (S1)

$$\left(\text{Le schéma (S1) est consistant d'ordre 2}\right) \iff \left(\begin{array}{l} \phi(t,y,0) = f(t,y) \\ \frac{\partial \phi}{\partial h}(t,y,0) = \frac{1}{2} f^{(1)}(t,y) \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial h^2}(t,y,0) \neq \frac{1}{3} f^{(2)}(t,y) \end{array}\right.$$

avec $f^{(1)}(t,y) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) f(t,y)$, $f^{(2)} = \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial f^{(1)}}{\partial y} \cdot f$

On a : $\phi(t,y,h) = \frac{1}{2}\left[f(t,y) + f(t+h, y+hf(t,y))\right]$

donc $\phi(t,y,0) = \frac{1}{2}\left[f(t,y) + f(t,y)\right] = f(t,y)$, le schéma est consistant au moins d'ordre (1).

On a : $\frac{\partial \phi}{\partial h}(t,y,h) = \frac{\partial}{\partial h} \frac{1}{2}\left[f(t,y) + f(t+h, y+hf(t,y))\right]$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial h} f(t+h, y+hf(t,y))$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t} f(t+h, y+hf(t,y)) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(t+h, y+hf(t,y)) \times f(t,y)\right]$$

donc $\frac{\partial \phi}{\partial h}(t,y,0) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) \cdot f(t,y)\right] = \frac{1}{2} f^{(1)}(t,y)$

le schéma est consistant au moins d'ordre 2. De plus on a :

$\frac{\partial^2 \phi}{\partial h^2}(t,y,0) \neq \frac{1}{3} f^{(2)}(t,y)$. Donc le schéma est exactement (2)