d'ordre 2.

b) - La stabilité

(Le schéma (S1) est stable) $\Leftrightarrow$ (ϕ est lipschitzienne par rapport à y).

Soit $(t, y, z, h) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, h_0]$.

$$|\phi(t,y,h) - \phi(t,z,h)| = \left| \frac{1}{2}[f(t,y) + f(t+h, y + hf(t,y))] - \frac{1}{2}[f(t,z) + f(t+h, z + hf(t,z))] \right|$$

$$\leq \frac{1}{2}|f(t,y) - f(t,z)| + \frac{1}{2}|f(t+h, y + hf(t,y)) - f(t+h, z + hf(t,z))|$$

Comme f est lipschitzienne donc il existe $L > 0$ tq :

$$|f(t,y) - f(t,z)| \leq L|y - z|$$

donc la dernière inégalité soit.

$$|\phi(t,y,h) - \phi(t,z,h)| \leq \frac{L}{2}|y - z| + \frac{L}{2}|y + hf(t,y) - (z + hf(t,z))|$$

$$\leq \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right)|y - z| + \frac{L}{2}h|f(t,y) - f(t,z)|$$

$$\leq L|y - z| + \frac{L^2}{2}h|y - z| \leq \underbrace{\left(L + \frac{L^2}{2}h_0\right)}_{C}|y - z|$$

$$\leq C|y - z|$$

il faut que la constante C est indépendante de h.

Donc le schéma est stable. Combinant a) et b), on trouve que le schéma est converge d'ordre 2.