Exo2 Soit le pb de Cauchy suivant :

$$(E)\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & , t \in [a,b]. \\ y(a) = y_0 . \end{cases}$$

On associe à (E) le schéma numérique suivant :

$$(S_2)\begin{cases} y_0 = \gamma \\ y_{n+1} = y_n + \alpha h f(t_n, y_n) + \beta h f(t_n + dh, y_n + dh\, f(t_n, y_n)) & 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

avec $d \in]0,1]$ est fixé, α, β sont des réels à choisir, $h = \frac{b-a}{N}$

$t_n = a + nh$.

1- Montrons que le schéma (S_2) est stable pour tout choix de α et β.

Le schéma (S_2) est un schéma à un pas tel que la fonction ϕ

est définie par : $\phi : [a,b] \times \mathbb{R} \times [0, h_0] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$(t, y, h) \longmapsto \phi(t, y, h) = \alpha f(t,y) + \beta f(t + dh, y + dh f(t,y))$$

Le schéma (S_2) est stable pour tout choix de α et β ssi ϕ est lipschitzienne

par rapport à y pour tout α, β. En effet.

Soit $(t, y, z, h) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2 \times [0, h_0]$.

$$|\phi(t,y,h) - \phi(t,z,h)| \leq |\alpha| |f(t,y) - f(t,z)| + |\beta| \, |f(t+dh, y + dh f(t,y)) - f(t+dh, z + dh f(t,z))|$$

$$\leq |\alpha| . L + |\beta| \, |y + dh f(t,y) - (z + dh f(t,z))|$$

$$\leq (|\alpha| + |\beta|) L + |\beta| d h L \leq (|\alpha| + |\beta| + |\beta| d h_0) L \leq k . L$$

~~une~~ donc il existe une constante $k = |\alpha| + |\beta| + |\beta| d h_0 > 0$ indépendante