Donc $\frac{\partial \phi}{\partial h}(t,y,0) = B\alpha\left[\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) \cdot f(t,y)\right]$

$= B\alpha\, f^{(1)}(t,y)$

Donc les relations sont $\begin{cases} \alpha + B = 1 \Rightarrow \alpha = 1 - B \\ \alpha B = \frac{1}{2} \Rightarrow B = \frac{1}{2\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - \frac{1}{2\alpha} \\ B = \frac{1}{2\alpha} \end{cases}$.

D'après les critères de convergence le schéma (S2) est converge au moins d'ordre 2 si $\begin{cases} \alpha = 1 - \frac{1}{2\alpha} \\ B = \frac{1}{2\alpha} \end{cases}$.

5). D'après les questions précédentes, on trouve que le schéma converge au moins d'ordre 2, donc il existe $k > 0$ tq :

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - Y(t_n)| \leq k \cdot h^2.$$

Exo3 : Considérons le schéma numérique.

$$(S3) \begin{cases} y_0 = \alpha \\ y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n, h) \quad n \geq 0 \end{cases}$$

avec $\phi(t,y,h) = a K_1 + b K_3$ où a et b sont deux constantes

et $K_1 = f(t,y)$, $K_2 = f(t + \frac{h}{3}, y + \frac{h}{3} K_1) = f(t + h/3, y + h/3\, f(t,y))$

et $K_3 = f(t + \frac{2h}{3}, y + \frac{2h}{3} K_2) = f(t + \frac{2h}{3}, y + \frac{2h}{3} f(t + h/3, y + h/3\, f(t,y)))$