Donc $\phi(t,y,h) = a f(t,y) + b f\left(t+\frac{2h}{3}, y+\frac{2h}{3} f\left(t+\frac{h}{3}, y+\frac{h}{3}f(t,y)\right)\right)$

1)- La relation entre a et b pour que (S3) soit consistant :

$\phi(t,y,0) = a f(t,y) + b f(t,y) = (a+b) f(t,y)$. La relation est

$a+b=1$

2)- Pour étudier la stabilité de (S3), on suit la même procédure d'exo 2. En effet :

$|\phi(t,y,h) - \phi(t,z,h)| = \left|a f(t,y) + b f\left(t+\frac{2h}{3}, y+\frac{2h}{3} f\left(t+\frac{h}{3}, y+\frac{h}{3}f(t,y)\right)\right)\right.$

$\left. - \left(a f(t,z) + b f\left(t+\frac{2h}{3}, z+\frac{2h}{3} f\left(t+\frac{h}{3}, z+\frac{h}{3}f(t,z)\right)\right)\right)\right|$

$\leq |a|.L + |b| L \left| y+\frac{2h}{3} f\left(t+\frac{h}{3}, y+\frac{h}{3}f(t,y)\right) - \left(z+\frac{2h}{3} f\left(t+\frac{h}{3}, z+\frac{h}{3}f(t,z)\right)\right)\right|$

$\leq (|a|+|b|)L + |b| L . \frac{2h}{3}\left| y+\frac{h}{3}f(t,y) - \left(z+\frac{h}{3}f(t,z)\right)\right|$

$\leq \left(|a|+|b|+|b|\frac{2h}{3}\right)L + |b| L \frac{2h}{3} . \frac{h}{3} L$

$\leq \left(|a|+|b|+\frac{2h}{3}|b|+\frac{2h^2}{9}|b|\right)L \leq \underbrace{\left(|a|+|b|+\frac{2h_0}{3}|b|+\frac{2h_0^2}{9}|b|\right)L}_{C \geq 0 \text{ indépendante de } h}$

Donc le schéma est stable quelque soit a et b $\in \mathbb{R}$.

3)- Détermination de a et b pour que le schéma (S3) soit au moins d'ordre 2.