

Université de Batna -2-
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Matière Topologie
Mme. Hanachi Adalet
2019-2020

EXAMEN DE RATTRAPAGE
2^{ÈME} ANNÉE LICENCE (MATHS et SAD)

Exercice 1.

I- Soit d la distance usuelle sur \mathbb{R} .

1. Donner la définition de d , puis conclure la définition de la distance produit sur \mathbb{R}^2 (usuelle produit).
2. Montrer que la distance usuelle produit est métriquement équivalente à

$$\begin{cases} d_{\infty} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (X, Y) \mapsto d_{\infty}(X, Y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \end{cases}$$

avec $X = (x_1, x_2)$ et $Y = (y_1, y_2)$

II- Montrer en utilisant la définition que

1. La suite $x_n = \frac{1}{n}$, $n \neq 0$ converge vers 0 par rapport à la distance usuelle sur \mathbb{R} .
2. La suite $y_n = (-1)^n$ admet deux valeurs d'adhérences 1 et -1.

Exercice 2

1. Montrer que $\sqrt{x+a} - \sqrt{x} \leq \frac{a}{2}$ pour $x \geq 1$ et $a \geq 0$.
2. Montrer que la fonction f admet un point fixe unique dans $[1, \infty)$ avec $f(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 3 Soient $E = \{f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}) / f(0) = 0\}$ et N l'application définie sur E par :

$$\forall f \in E, \quad N(f) = \|5f' + 4f\|_{\infty}$$

- Montrer que N est une norme sur E .

Veillez être clair et précis dans votre réponse, écrire le nom, prénom et groupe. Envoyer un seul fichier aux adresses suivantes :

- 1- Megri Sabra :s.megri@univ-batna2.dz;
- 2- Messaoudi Klelifa :k.messaoudi@univ-batna2.dz;
- 3- Zerguine Mohamed :m.zerguine@univ-batna2.dz.

Envoyer les réponses avant 13 :00 h en un seul email.

Bon courage.