On réécrit le schéma (2) comme suit:

$$y_{n+2} + \alpha_0 y_{n+1} + \alpha_1 y_n = h\beta f_{n+2} \Leftrightarrow d_2 y_{n+2} + d_1 y_{n+1} + d_0 y_n = h\beta_2 f_{n+2}$$

avec $d_2 = 1$, $d_1 = \alpha_0$, $d_0 = \alpha_1$ et $\beta_2 = \beta$, $\beta_0 = \beta_1 = 0$.

le schéma est d'ordre 2 ssi

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{2} d_i = 0 \text{ et } \sum_{i=0}^{2} i d_i = \sum \beta_i \\ \sum_{i=0}^{2} i^2 d_i = 2\sum_{i=0}^{2} i\beta_i \text{ et } \sum_{i=0}^{2} i^3 d_i \neq 3\sum_{i=0}^{2} i^2 \beta_i \end{cases}$$ (0,5)

On a : $\sum_{i=0}^{2} d_i = 0 \Leftrightarrow d_0 + d_1 + d_2 = \alpha_1 + \alpha_0 + 1 = 0$.

$\sum i d_i = \sum \beta_i \Leftrightarrow 0.d_0 + 1.d_1 + 2d_2 = 1.\alpha_0 + 2 = \beta$.

$\sum_{i=0}^{2} i^2 d_i = 2\sum i\beta_i \Leftrightarrow 0^2 d_0 + 1^2 d_1 + 2^2 d_2 = \alpha_0 + 4 = 2.2\beta = 4\beta$

donc on a le syst linéaire

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + 0.\beta = -1 \\ \alpha_0 + 0.\alpha_1 - \beta = -2 \\ \alpha_0 + 0.\alpha_1 - 4\beta = -4 \end{cases}$$ (1)

On résoud ce système, on trouve :

$\alpha_0 = \frac{-4}{3}$, $\alpha_1 = \frac{1}{3}$ et $\beta = 2/3$, donc le schéma sera

$$y_{n+2} - \frac{4}{3} y_{n+1} + \frac{1}{3} y_n = \frac{2h}{3} f_{n+2}.$$ (1,5)

le schéma est exactement d'ordre 2 ssi

$$\sum_{i=0}^{2} i^3 d_i \neq 3\sum_{i=0}^{2} i^2 \beta_i \Leftrightarrow \begin{cases} 0\, d_0 + 1.d_1 + 8.d_2 = -\frac{4}{3} + 8 = \frac{20}{3} \\ 3 \times 4.\beta_2 = 12 \times \frac{2}{3} = \frac{24}{3} \neq \frac{20}{3}. \end{cases}$$ (0,5)