2) - Montrons que les deux schémas sont d'ordre 1.

a) - Euler explicite i) En utilisant la déf. Le schéma est d'ordre 1 ssi

2pts

$$\max_i \left\| \frac{y(t_{i+1})-y(t_i)}{h} - \phi(t_i, y(t_i), h)\right\| \le Ch.$$

$$\Updownarrow$$

$$\max_i \left| \frac{y(t_{i+1})-y(t_i)}{h} - f(t_i, y(t_i))\right| \le Ch.$$

on fait le développement de Taylor de la fonction y au voisinage du pt t_i.

$$y(t_{i+1}) = y(t_i+h) = y(t_i) + h\,y'(t_i) + \frac{h^2}{2} y''(t_i) + \frac{h^3}{3!} y^{(3)}(\tau_1)$$

avec $\tau_1 \in (t_i, t_{i+1})$.

donc $\dfrac{y(t_{i+1})-y(t_i)}{h} = y'(t_i) + \dfrac{h}{2} y''(t_i) + \dfrac{h^2}{6} y^{(3)}(\tau_i)$

et $\dfrac{y(t_{i+1})-y(t_i)}{h} - f(t_i, y(t_i)) = \cancel{y'(t_i)} + \dfrac{h}{2} y''(t_i) + \dfrac{h^2}{6} y^{(3)}(\tau_1)$

$- \underbrace{\cancel{(\cos(t_i) + y(t_i))}}_{y'(t_i)\ \text{(de l'eq)}} = \dfrac{h}{2} y''(t_i) + \underbrace{\dfrac{h^2}{6} y^{(3)}(\tau_1)}_{\to 0}$

donc $\max_i \left| \dfrac{y(t_{i+1})-y(t_i)}{h} - f(t_i, y(t_i))\right| \le \dfrac{h}{2} \max_{0<t\le 1} |y''(t)|$

$\le Ch$

donc le schéma est d'ordre 1.

ii) En utilisant les critères.

le schéma est consistant ssi $\phi(t, y(t), 0) = f(t, y)$ 1pt

et $\dfrac{\partial \phi}{\partial h}(t, y, 0) \neq \dfrac{1}{2} f^{(1)}(t, y)$.