on a : $\phi(t,y,h) = f(t,y) \Rightarrow \phi(t,y,0) = f(t,y)$.

et $\frac{\partial \phi}{\partial h}(t,y,h) = 0 \neq \frac{1}{2} f^{(1)}(t,y)$. donc le schéma est

~~exac~~ consistant exacte est d'ordre 1.

La stabilité

Le schéma est stable si ϕ est lipschitzienne / y.

1pt

on a :

$|\phi(t,y,h) - \phi(t,z,h)| = |f(t,y) - f(t,z)| \leq L|y - z|$ car

f est lipshitzienne. Donc le schéma est converge d'ordre 1

Pour Euler implicite

i) En utilisant la déf.

on developpe la fonction y au voisinage de t_{i+1}

on a : $y(t_i) = y(t_{i+1} - h) = y(t_{i+1}) - h y'(t_{i+1}) + \frac{h^2}{2} y''(t_{i+1})$

$- \frac{h^3}{3!} y^{(3)}(\tau_2)$, $\tau_2 \in (t_i, t_{i+1})$

2pts

donc $\frac{y(t_i) - y(t_{i+1})}{-h} = y'(t_{i+1}) - \frac{h}{2} y''(t_{i+1}) + \frac{h^2}{6} y^{(3)}(\tau_2)$

et $\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} - f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) = \cancel{y'(t_{i+1})} - \frac{h}{2} y''(t_{i+1})$

$+ \frac{h^2}{6} y^{(3)}(\tau_2) - \cancel{y'(t_{i+1})} = -\frac{h}{2} y''(t_{i+1}) + \cancel{\frac{h^2}{6} y^{(3)}(\tau_2)}$

donc $\max_i \left| \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} - f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) \right| \leq C h$ avec

$C = \frac{1}{2} \|y^{(2)}\|_\infty$. Ce qui donne que le schéma

est d'ordre 1.