Introduction à la Topologie
L2 Maths –Suite du Chapitre 1

A. Hanachi

Université Batna 2
Département de Mathématiques

12 février 2021

Continuité locale et globale

Définition 1.1 (Continuité locale et globale)

Soient $(E,d), (F,\delta)$ *deux espaces métriques et* $a \in E$. *Soit* f *une application de* E *dans* F. *On dit que* f *est continue au point* a *ssi*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \rho(\varepsilon, a) > 0 / \forall x \in E, d(x,a) \leq \rho \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

On dit que f *est continue sur* $A \subset E$ *ssi elle est continue sur tout point* a *de* A

Remarque 1.1

- *La continuité locale dans un espace topologique quelconque*
  Soient $(E, \mathscr{T}_E)$, $(F, \mathscr{T}_F)$ *deux espaces topologiques et* f *une application de* E *dans* F. *Soit* a *un point de* E. *On dit que* f *est continue au point* a *ssi*

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(a)), \exists U \in \mathcal{V}(a) / \text{tel que} f(U) \subset V.$$

Remarque 1.2

- *La continuité globale sur un espace topologique quelconque*
  Soient $(E, \mathscr{T}_E)$ *et* $(F, \mathscr{T}_F)$ *deux espaces topologiques. Une application* f *de* E *dans* F *est dite continue sur* E *si*

$$\forall O \in \mathscr{T}_F \Rightarrow f^{-1}(O) \in \mathscr{T}_E.$$

Exemple 1.1

1- *Soient* (E, d) *un espace métrique et* $y \in E$. *On définit l'application* $f_y : E \to \mathbb{R}^+$ *par :*

$$x \mapsto f_y(x) = d(x, y)$$

f_y *est continue sur* E.

Exemple 1.2

1- *En effet soit $x' \in E$, on a*

$$|f_y(x) - f_y(x')| = |d(x,y) - d(x',y)| \leq d(x,x')$$

donc il suffit de prendre $\rho = \varepsilon$.

2- *L'application $t_a : (\mathbb{R}, |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ définie par $x \in \mathbb{R} \mapsto t_a(x) = x + a$ est continue sur $\mathbb{R}$*

Définition 1.2 (Continuité séquentielle)

Soient (E,d), (F,δ) deux espaces métriques et f une application de E dans F,on dit que f est séquentiellement continue si toute suite $(x_n)_n$ dans E converge vers x, la suite $(f(x_n))_n$ dans F converge vers $f(x)$.

Remarque 1.3

Dans les espaces métriques la continuité séquentielle $\Leftrightarrow$ continuité simple, mais dans un espace topologique quelconque on a seulement une implication c-à-d continuité séquentielle $\Rightarrow$ continuité simple.

Continuité uniforme

Définition 1.3

Soient (E,d), (F,δ) deux espaces métriques et f une application. On dit que f est uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \rho(\varepsilon) > 0 / \forall x, x' \in E, d(x,x') \leq \rho \Rightarrow \delta(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$$

Remarque 1.4

1- *Toute fonction uniformément continue est continue.*

2- *f n'est pas uniformément continue ssi*
$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \rho > 0, \exists (x,x') \in E / d(x,x') \leq \rho \wedge \delta(f(x), f(x')) > \varepsilon_0$

3- *On peut utiliser les suites pour démontrer que f n'est pas uniformément continue. Il suffit démontrer que*
$\exists \varepsilon_0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n, x'_n \in E : d(x_n, x'_n) \leq \frac{1}{n} \wedge \delta(f(x_n), f(x'_n)) > \varepsilon_0).$

Exemples

Exemple 1.3

1- *L'application* $Id : (\mathbb{R}, |.|) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|)$ *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$.

2- *La fonction* $f : (\mathbb{R}, |.|) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|)$ *définit par* $f(x) = x^2$ *n'est pas uniformément continue sur* $\mathbb{R}$.
En utilisant la remarque(1.4)*, pour le chois* $x_n = n$ *et* $x'_n = \frac{1}{n} + n$*, notons que* $\lim_{n\to\infty} |x_n - x'_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ *tandis que* $\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x'_n)| = \lim_{n\to\infty} |n^2 - (n + \frac{1}{n})^2| = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n^2}) \neq 0.$

3- *La fonction* $g : (\mathbb{R}^*, |.|) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|)$ *définit par* $g(x) = \frac{1}{x}$ *n'est pas uniformément continue sur* $\mathbb{R}^*$.
En utilisant la remarque(1.4)*, pour le chois* $x_n = \frac{1}{n}$ *et* $x'_n = \frac{1}{2n}$*, notons que* $\lim_{n\to\infty} |x_n - x'_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$ *tandis que* $\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x'_n)| = \lim_{n\to\infty} |n - 2n| = \lim_{n\to\infty} n \neq 0.$

Les fonctions k-Lipschitzienne

Définition 1.4

Soient (E,d), (F,δ) *deux espaces métriques et* f *une application de* E *dans* F. *Soit* $k>0$ *on dit que* f *est k-Lipschitzienne si*

$$\forall x, x' \in E, \delta(f(x), f(x')) \leq kd(x, x')$$

Remarque 1.5

1- *Toute fonction k-Lipschitzienne est uniformément continue.*

2- *Si* $f:(E,d)\to(E,d)$ *dans la définition* (1.4) *et la constante* $k\in]0,1[$, *dans ce cas* f *est dite contractante.*

Exemple 1.4

La fonction f_y *de l'exemple* (1.1) *est Lipschitzienne.*

Exercice 1.1

Montrer que la fonction $g : (E, d) \to (\mathbb{R}^+, |.|)$ *définit par* $g(x) = d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$ *avec* $A \in \mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ *est Lipschitzienne.*

Proposition 1.1

Soient $f : (E, d) \to (F, \delta)$ *une fonction uniformément continue et* $(x_n)_n$ *une suite de Cauchy dans* E*, alors la suite* $(f(x_n))_n$ *est de Cauchy dans* F*.*

Preuve 1.1

Soit $(x_n)_n$ *une suite de Cauchy dans* E*, alors* $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n, m \in \mathbb{N} / n \geq m \geq n_0$ *on a* $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$*, comme* f *est uniformément continue si on prend* $\rho = \varepsilon$ *de la définition* (1.3)*, et on garde* n_0*, on trouve si* $n \geq m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq \rho = \varepsilon \Rightarrow \delta(f(x_n), f(x_m)) \leq \varepsilon$*. Donc* $(f(x_n))_n$ *est de Cauchy*

Les espaces complets

Définition 2.1 (Espace complet)

Un espace métrique (E, d) *est dit complet si toute suite de Cauchy est convergente.*

Exemple 2.1

L'espace $(\mathbb{R}, |.|)$ *est complet.*

Proposition 2.1

Si X *un sous espace complet d'un espace métrique* (E, d)*, alors* X *est fermé dans* E.

Preuve 2.1

Soit X un sous espace complet de l'espace métrique E, on va montrer que X est fermé. En effet soit $x \in \overline{X}$, il existe alors une suite $(x_n) \subset X$ tel que (x_n) tend vers x, ce qui donne (x_n) est de Cauchy dans X, mais X est complet donc elle converge dans X on déduit que $x \in X \Rightarrow \overline{X} \subset X$ d'autre part $X \subset \overline{X}$, donc X est fermé.

Proposition 2.2

Tout sous espace fermé X d'un espace complet E est complet.

Preuve 2.2

Soit X un espace fermé de l'espace complet E. On va montrer que X est complet. En effet soit (x_n) une suite de Cauchy dans $X \subset E$, en utilisant la complétude de E on trouve que (x_n) converge vers $x \in E$ comme X est fermé, on obtient $x \in X$ ce qui implique X est complet.

Proposition 2.3

Un produit fini ou dénombrable d'espaces complets est complet.

Théorème de point fixe

Théorème 2.1

Théorème de point fixe *Si f est contractante sur un espace métrique complet E, alors f admet un* *point fixe* *unique c-à-d il existe $\overline{x} \in E$ unique tel que $f(\overline{x}) = \overline{x}$.*

Preuve 2.3

Pour la démonstration du Théorème de point fixe, vous pouvez voir le Cours de l'année passé sur site.

Remarque 2.1

1- *Si $f : (E \subseteq \mathbb{R}, |.|) \to (E, |.|)$ avec $f \in C^1(E)$. f est contractante sur E ssi $\sup\limits_{x \in E} |f'(x)| < 1$.*

2- *Toutes les hypothèses du Théorème de point fixe sont nécessaire, comme le montre l'exemple suivant.*

Exemple 2.2

1- *Si* $E =]0,1[$ *et* $f(x) = \frac{x}{2}$. *f n'admet pas un point fixe car E n'est pas complet.*

2- *Si* $E = [0,1]$ *et* $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ *f n'admet pas un point fixe car* $f(E) \nsubseteq E$.

3- *Si E un espace métrique complet quelconque et* $f(x) = x$, *tous les points sont fixes car f n'est pas contractante.*

Exercice 2.1

Soit $E = ([\frac{2}{3}, \infty[, |.|)$ *un sous espace de* $(\mathbb{R}, |.|)$ *et f une fonction de E dans* $\mathbb{R}$ *définit par*

$$f(x) = \frac{2x+6}{3x+2}$$

Montrer que f admet un point fixe unique dans E.

Solution d'exercice 2.1

Pour montrer que f admet un point fixe unique dans E, il faut que toutes les conditions du Théorème de point fixe sont satisfaites. En effet

1- E *est complet car, il est fermé dans un complet.*

2- $f(E) \subset E$. *On a* $f'(x) = \frac{-14}{(3x+2)^2} < 0$, *ce qui implique* f *est décroissante et* $f(E) =]\lim\limits_{x\to\infty} f(x), f(\frac{2}{3}] =]\frac{2}{3}, \frac{11}{6}] \subset E$.

3- f *est contractante car* $\sup\limits_{x\in E}|f'(x)| = \sup\limits_{x\in E}|\frac{-14}{(3x+2)^2}| \leq \frac{14}{16} < 1$.

Grâce au Théorème de point fixe, il existe alors $\overline{x} \in E$ *unique tel que*

$$\overline{x} = f(\overline{x}) \Rightarrow \overline{x} = \sqrt{2}.$$