

Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Introduction à la Topologie
Mme. Hanachi Adalet
2021-2022

TRAVAUX DIRIGÉ 2
2^{ÈME} ANNÉE LICENCE MATH

Exercice 1 On muni \mathbb{Q}^* par la distance d tel que $d : \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^* \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \begin{cases} 0; & \text{si } x = y \\ \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites telles que $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = n$

- 1- Est ce que les suites (x_n) et (y_n) sont de Cauchy?
- 2- Déduire que (\mathbb{Q}^*, d) n'est pas complet.

Exercice 2 On muni $E = C([a, b], \mathbb{R})$ par d_∞ la distance de la convergence uniforme telle que

$$d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

Pour tout $k > 0$, considérons

$$M_k = \{f \in E, / |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \forall x, y \in [a, b]\}$$

- 1- Montrer que M_k est fermé dans (E, d_∞) .
- 2- Déduire que (M_k, d_∞) est complet.

Soit

$$D_k = \{f \in E, / |f'(x)| \leq k, \forall x \in [a, b]\}$$

- 3- Vérifier que $D_k \subset M_k$.

Exercice 3 Soit (E, d) un espace métrique et B une partie non vide de E .

- 1- Soit $x \in E$ tel que $x \in \bar{B}$. Peut-on trouver deux ouverts U et V tel que $x \in U$ et $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.
- 2- On suppose que $x \notin \bar{B}$ et on pose $\delta = d(x, B)$. Montrer que $U = B(x, \frac{\delta}{2})$ et $V = \cup_{y \in B} B(y, \frac{\delta}{2})$ sont des ouverts séparant x et B c-à-d $x \in U$ et $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.
- 3 Soit A une partie de E telle que $A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset$.
 - 3-1 Peut-on avoir $d(A, B) = 0$.
 - 3-2 Pour $x \in A$, on pose $d_x = d(x, B)$ et pour $y \in B$, $\delta_y = d(y, A)$ et on désigne par U et V les ouverts $U = \cup_{x \in A} B(x, \frac{d_x}{2})$, $V = \cup_{y \in B} B(y, \frac{\delta_y}{2})$. Montrer que le couple (U, V) sépare (A, B) c-à-d $A \subset U$ et $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Exercice 4 Soit $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ une fonction telle que $f(x) = \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{2}{3}x$. Montrer que f admet une racine unique dans \mathbb{R} .

Exercice 5 Soit $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$. Montrer que f admet un point fixe unique dans $[1, 2]$.

Exercice 6 Soient (E, d_E) , (F, d_F) deux espaces métriques et f une application continue de E dans F . Soit K une partie compacte de F . Montrer que $f^{-1}(K)$ est fermée de E . Trouver un exemple qui montre que $f^{-1}(K)$ n'est pas nécessairement compacte.

Devoir Soient $f : (E, d) \rightarrow (F, \delta)$ une application continue et surjective, et A une partie dense dans E . Montrer que $f(A)$ est dense dans F