1.1 Définition de la résistance des matériaux

La résistance des matériaux (RDM), est une partie de la mécanique des corps déformables, qui s'intéresse à l'étude du comportement statique des corps dit solides (arbres de transmission, bâtiments, ouvrage d'art, diverses pièces mécaniques…) (figure 1.1) sous l'action de différentes charges extérieures dont le but de déterminer ou vérifier leurs dimensions afin qu'ils supportent les charges qu'ils subissent, dans des conditions de sécurité satisfaisantes et au meilleur coût (optimisation des formes, des dimensions, des matériaux…).

Figure 1.1

L'objectif de ce cours est de fournir les principales démarches de raisonnement et relations utiles en résistance des matériaux, pour dimensionner des éléments mécaniques de type « poutre, arbre… » à partir d'un cahier des charges donné.

NB :

- les pièces mécaniques pouvant être traitées en RDM sont appelées «poutre, arbres…» ;

- les mécanismes composés de plusieurs poutres sont appelés : structures.

Exemple

Sur le plongeoir montré en figure 1.2, on peut visiblement voir le changement de forme dû au poids du plongeur.

Considérons que le plongeoir comme un corps déformable, la résistance des materiaux permet de déterminer :
-la valeur du poids pouvant endommager le plongeoir et/ou la rupture peut se produire;
-la relation qui existe entre le déplacement d et le poids P du plongeur;
-l'épaisseur e du plongeoir qu'on doit avoir pour résister au poids P;
-le matériau qu'on doit utiliser.

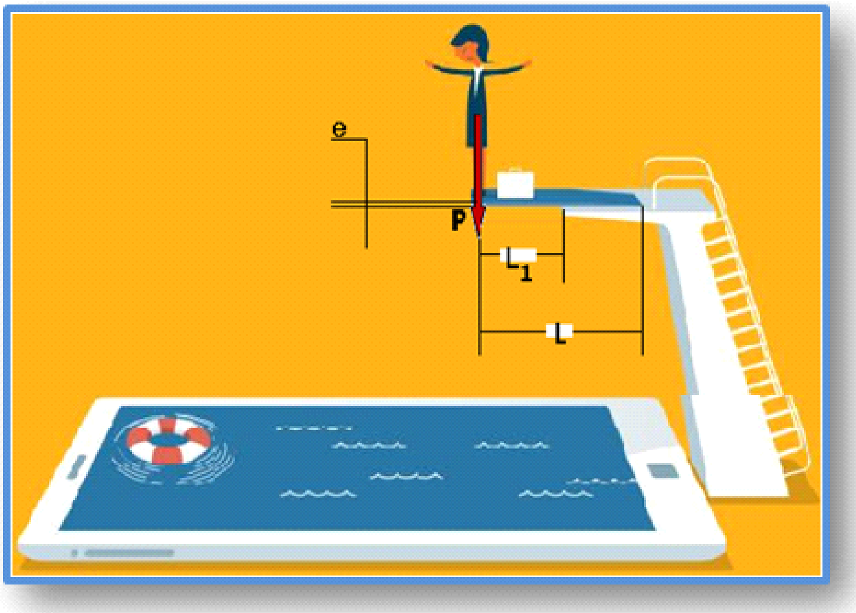


Figure 1.2

1.2 Domaines d'application de la résistance des matériaux

Les domaines d'application de la RDM sont :

– constructions (génie civil ou bâtiments
– mécanique (machines, moteurs, avions)

– chimie (réservoirs, chaudières)

– électricité (câbles, pylônes, centrales)

– physique (physique du solide)

– matériaux (physique des matériaux)

– etc.….

1.3-Définition d'une poutre

Une poutre est un solide engendré par une surface plane (S) dont le centre d'inertie G décrit une courbe GG1, le plan de (S) restant normal à la courbe GG1 (Fig. 1.3)

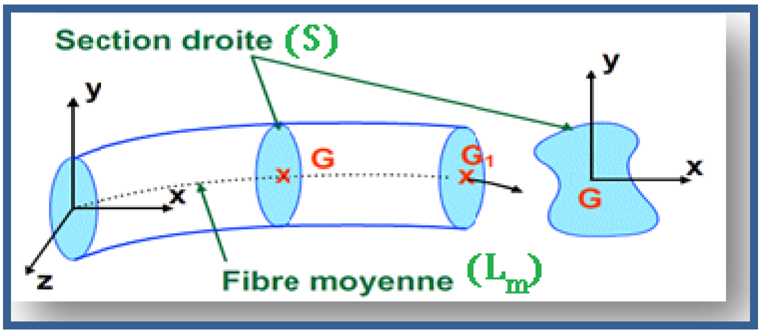


Figure 1.3

L_m (ou C) = ligne moyenne, elle représente la courbe des centres de gravité des sections S.

S = sections droites, perpendiculaires localement à C en G_i.

Remarque : (S) peut varier le long de C.

L'étude du comportement d'une structure soumise à des actions mécaniques, en RDM, prennent en considération les points suivant :

- résistance minimale élastique (câble, arbre de transmission, denture d'engrenage…) → « ne doit pas casser » ;

- résistance maximale à la rupture (goupille de sécurité, pièce à déformer…) → « doit casser » ; • déformation maximale limitée (rigidité d'une structure, conditions d'engrènement…) → « doit rester rigide et se monter » ;

• déformation minimale fixée (amortissements par ressorts, mesure d'effort par déformation…) → « doit se déformer de manière contrôlée ».

1.4- Hypothèses de la RDM

L'étude des pièces en résistance des matériaux nécessite des hypothèses simplificatrices suivantes.

1.4.1- Matériaux

Homogénéité : Structure continue et identique dans toutes les directions ; Cette hypothèse est fausse pour tous les matériaux granuleux ou fibreux (béton, pierre, bois, composites,...)

Isotropie : Même propriétés mécaniques dans toutes les directions. Cette hypothèse est fausse pour tous les matériaux granuleux ou fibreux.

1.4.2-Géométrie des pièces

Une poutre est un solide de volume engendré par une surface plane (S) dont le centre de gravité G décrit une courbe plane C appelée ligne (fibre ou axe) moyenne.

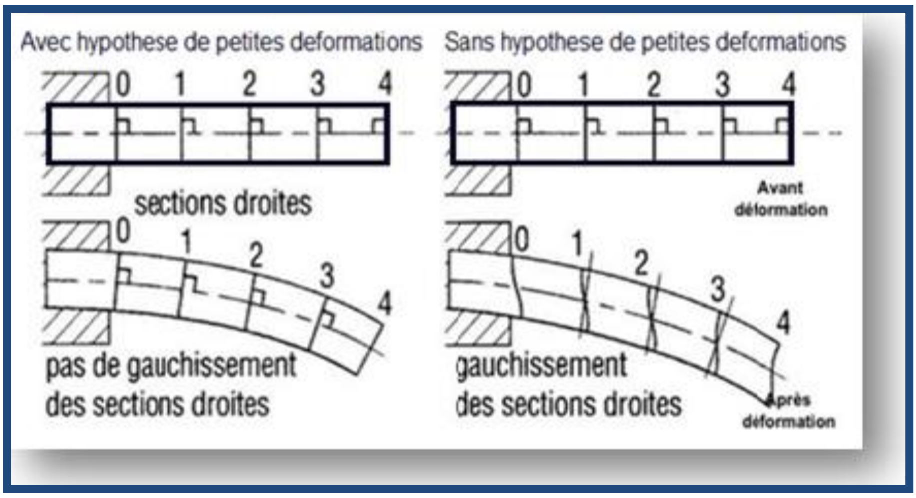


Figure 1.4

Les caractéristiques de la poutre sont :

- Ligne (fibre) moyenne C droite
- Section droite S constante
- S est perpendiculaire à C
- Grande longueur par rapport aux dimensions
- Existence d'un plan de symétrie
- Ligne moyenne possède des propriétés particulières

1.4.3-Navier-Bernouilli

Toutes sections planes normales aux fibres avant déformation restent planes et perpendiculaires aux fibres après déformation.

1.4.4- Comportement linéaire élastique

Les déformations seront faibles devant les dimensions de la poutre.

1.5-Différents types de sollicitation

-Effort de cohésion

Pour étudier une poutre (E) en équilibre sous l'action de plusieurs forces extérieures, il faut modéliser ce qui se passe dans la matière. Pour se faire, on réalise une coupure fictive de la poutre située à l'abscisse x qui la sépare en 2 tronçons E1 et E2. Les efforts de cohésion traduisent le actions de contact de (E2) sur (E1).Ces efforts de cohésion permettent à la poutre de ne pas se "disloquer" sous l'effet d'actions extérieures.

Les éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion s'expriment par :

$$[\boldsymbol{\tau_G}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{M}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{N} & \boldsymbol{M_t}\\ \boldsymbol{T_y} & \boldsymbol{M_{fy}}\\ \boldsymbol{T_z} & \boldsymbol{M_{fz}}\end{bmatrix}$$

Avec :

N : Effort normal

T_y : Effort tranchant suivant l'axe (G,y)

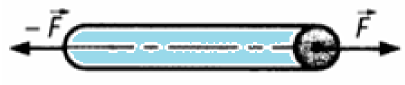
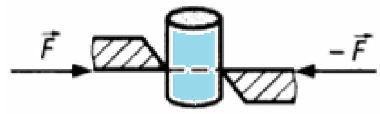
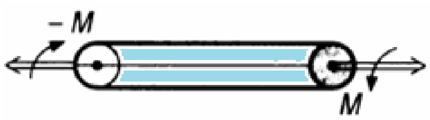
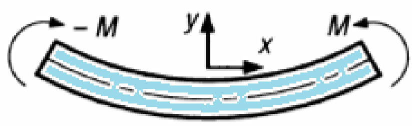
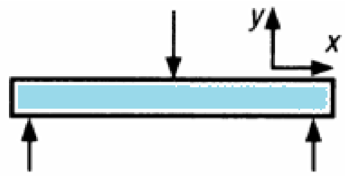
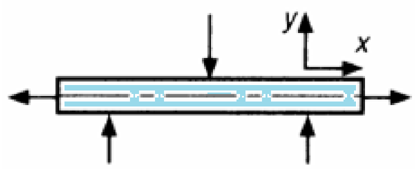
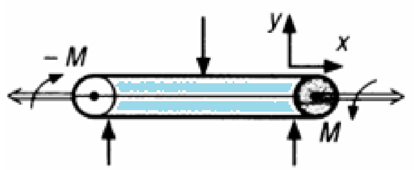
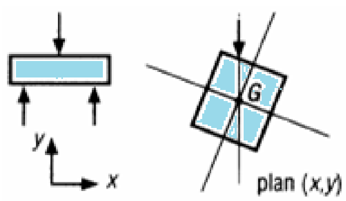
T_z : Effort tranchant suivant l'axe (G,z)

M_t : Moment de torsion

M_{fy} : Moment fléchissant suivant l'axe (G,y)

M_{fz} : Moment fléchissant suivant l'axe (G,z)

Les différentes sollicitations sont représentées dans le tableau 1.1 suivant :

Traction ou Extension / Compression		$_{G_s}\{T_{coh}\}_R = {}_{G_s}\left\{\begin{matrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_R$
Cisaillement		$_{G_s}\{T_{coh}\}_R = {}_{G_s}\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Ty & 0 \\ Tz & 0 \end{matrix}\right\}_R$
Torsion		$_{G_s}\{T_{coh}\}_R = {}_{G_s}\left\{\begin{matrix} 0 & Mt \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_R$
Flexion pure		$_{G_s}\{T_{coh}\}_R = {}_{G_s}\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Mfz \end{matrix}\right\}_R$
Flexion simple		$_{G_s}\{T_{coh}\}_R = {}_{G_s}\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Ty & 0 \\ 0 & Mfz \end{matrix}\right\}_R$
Flexion + traction		$_{G_s}\{T_{coh}\}_R = {}_{G_s}\left\{\begin{matrix} N & 0 \\ Ty & 0 \\ 0 & Mfz \end{matrix}\right\}_R$
Flexion + torsion		$_{G_s}\{T_{coh}\}_R = {}_{G_s}\left\{\begin{matrix} 0 & Mt \\ Ty & 0 \\ 0 & Mfz \end{matrix}\right\}_R$
Flambage		$_{G_s}\{T_{coh}\}_R = {}_{G_s}\left\{\begin{matrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Mfz \end{matrix}\right\}_R$
Flexion déviée		$_{G_s}\{T_{coh}\}_R = {}_{G_s}\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Ty & 0 \\ 0 & Mfz \end{matrix}\right\}_R$ $_{G_s}\{T_{coh}\}_R = {}_{G_s}\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & Mfy \\ Tz & 0 \end{matrix}\right\}_R$

1.6- Méthode de résolution d'un problème en RDM

Pour résoudre un problème de RDM on doit suivre les étapes suivantes:

1- les conditions d'équilibre doivent être satisfaites;

2- la géométrie de la déformation doit être décrite;

3- le comportement du matériau doit être caractérisé (Relation Force – Température - Déformation)

1.6 La statique

1.6.1 Définition d'une force

Une force est une grandeur vectorielle qui se note "F". Elle est caractérisée par :

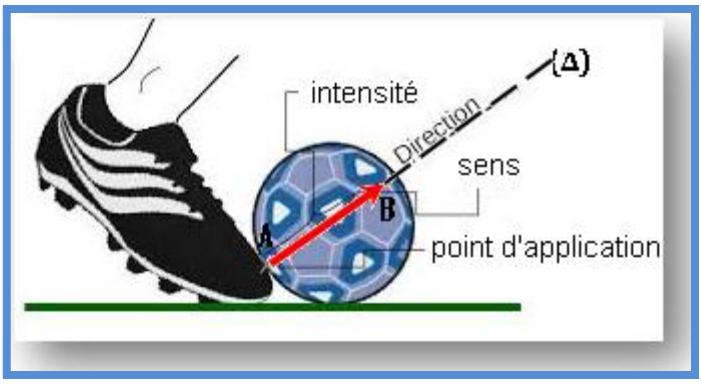


Figure 1.5

- son point d'application (son origine),
- sa direction (son support),
- son sens,
- son module ou sa valeur.

-Composantes d'un vecteur force

- Dans un plan Oxy

On peut écrire:

$$\vec{F} = F_x \vec{\imath} + F_x \vec{\jmath}$$

Si le vecteur force effectue un angle ϴ avec l'axe horizontal, alors on peut exprimer ses composantes F_x et F_y de la façon suivante :

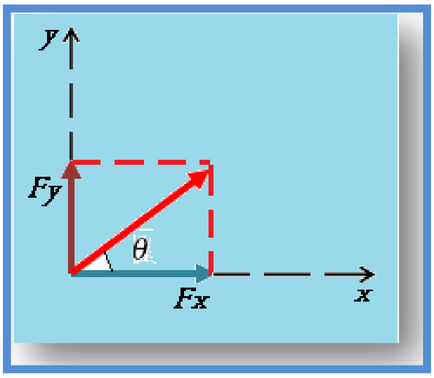


Figure 1.6

$F_x = Fcos\Theta$

$F_y = Fsin\Theta$

Donc :

$$\vec{F} = \boldsymbol{Fcos}\Theta\,\vec{\imath} + \boldsymbol{Fsin}\Theta\,\vec{\jmath}$$

- Dans l'espace Oxyz

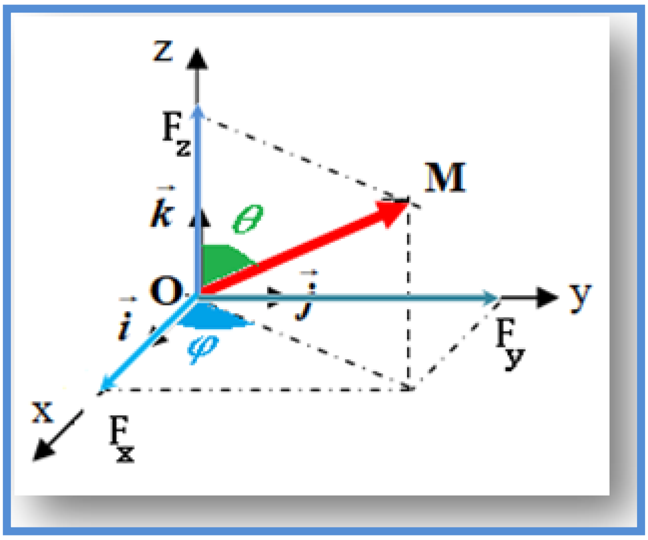


Figure 1.7

On peut écrire:

$$\vec{F} = F_x\,\vec{\imath} + F_x\,\vec{\jmath} + F_z\,\vec{k}$$

Si le vecteur force effectue un angle $\boldsymbol{\theta}$ et sa projection sur le plan Oxy fait un anle $\boldsymbol{\varphi}$ l'axe Ox, alors on peut exprimer ses composantes F_x et F_y et F_z de la façon suivante :

$F_x = F\sin\Theta \cos\varphi$

$F_y = F\sin\Theta \sin\varphi$

$F_z = F\cos\Theta$

Donc :

$$\vec{F} = F\sin\theta \cos\varphi \, \vec{\imath} + F\sin\theta \sin\varphi \, \vec{\jmath} + F\cos\theta \, \vec{k}$$

1.6.2 Moment d une force par rapport à un point

Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un point P, est égal au produit vectoriel des deux vecteurs $\overrightarrow{PA}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{F}\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$.

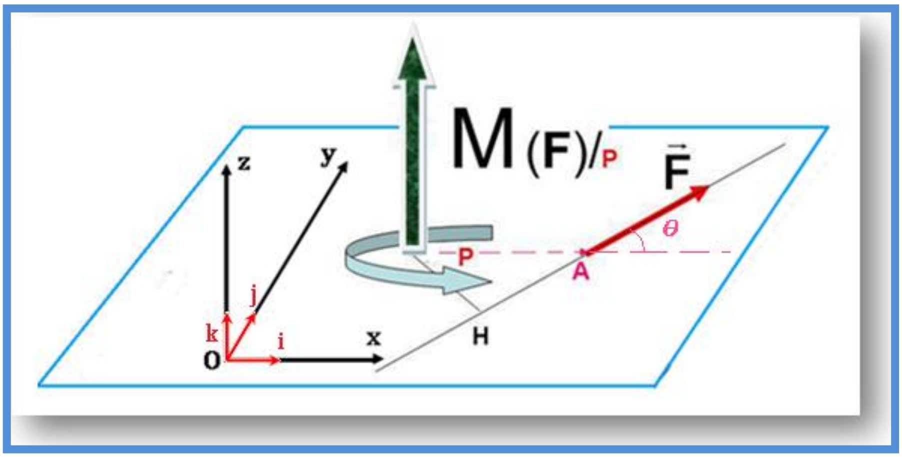


Figure 1.8

Il s'écrit :

$$\vec{M}(\vec{F})/_P = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{F}$$

Ce moment $\vec{M}(\vec{F})/_P$ est un vecteur qui est perpendiculaire au plan qui contient les deux vecteurs $\overrightarrow{PA}$ et $\vec{F}$.

-Méthode géométrique

$$\vec{M}(\vec{F})/_P = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{F} = \|\overrightarrow{PA}\| \|\vec{F}\| \cos\theta \, \vec{u}$$

-Méthode analytique

$$\overrightarrow{M}(\overrightarrow{F})/_P = \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\vec{\imath} - (xF_z - zF_x)\vec{\jmath} + (xF_y - yF_x)\vec{k}$$

d'où :

$M_{Px} = yF_z - zF_y$

$M_{Py} = xF_z - zF_x$

$M_{Pz} = xF_z - zF_x$

Méthode directe

Le moment d'une force $\overrightarrow{F}$, par rapport à un point P, est égal au produit du module F de la force par le bras de levier d (distance entre le point A et la direction de la force $\overrightarrow{F}$: $d = PH$).

Il s'écrit :

$$M(\overrightarrow{F})/P = \pm Fd$$

1.6.3 Condition d'équilibre

L'équilibre d'un solide a lieu lorsque les résultantes des forces et de leurs moments sont nulles. Il est décrit par les deux équations :

$$\sum \overrightarrow{\boldsymbol{F}} = \overrightarrow{\boldsymbol{0}} \text{........}(1.1)$$

$$\sum \overrightarrow{\boldsymbol{M}}(\overrightarrow{\boldsymbol{F}})/_P = \overrightarrow{\boldsymbol{0}} \text{.......}(1.2)$$

Avec :

·$\sum \overrightarrow{F}$ **:** résultante de toutes les forces extérieures agissant sur le corps

$\sum \overrightarrow{M}(\overrightarrow{F})/_P$: resultante des moments de toutes ces forces extérieures par rapport à un point arbitraire P

Dans l'espace (Oxyz), ces deux équations précédentes donnent :

$$\sum F_x = 0\ ; \quad \sum F_y = 0\ ; \quad \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0\ ; \quad \sum M_y = 0\ ; \quad \sum M_z = 0$$

-Dans le plan (Oxy), ces deux équations donnent :

$$\sum F_x = 0\ ; \quad \sum F_y = 0$$

$$\sum M_z = 0$$

Problème isostatique

On dit qu'un système d'équations est isostatique si le corps possède autant d'inconnues que d'équations ; dans ce cas, les équations suffisent à résoudre le problème.

Problème isostatique

Si par contre système d'équations possède plus d'inconnues que d'équations d'équilibre, le problème est hyperstatique.

Le degré d'hyperstaticité n est donné par la formule suivante :

$$\boldsymbol{n = Nr - Ne}$$

Ne : nombre d'équations (ex pour un solide dans le plan, Ne=3)

Nr : nombre de composantes de réaction

n : degré d'hyperstaticité

si n < 0 : le problème est hypostatique (pb instable insoluble)

si n=0 : le problème est isostatique

si n > isostatique : le problème est hyperstatique

1.7 Différents types de forces

L'ensemble des forces agissant sue une poutre ou une structure s'explique par quatre types de forces :

– les forces appliquées et les charges;

– les forces d'appui ou de contact;

– les forces internes

1.7.1 Forces appliquées et les charges

Les forces extérieures elles-mêmes peuvent être classées en :

– forces de concentrées

– forces linéiques [N/m] : ces forces s'appliquent le long d'une ligne

Le câble flexible d'un pont suspendu peut être considéré comme une ligne à une dimension le long de laquelle s'applique le poids de la chaussée.

Figure 1.8

– forces surfaciques [N/m^2] : ces forces s'appliquent sur une surface

Dans un barrage hydraulique, la pression de l'eau s'applique sur toute la surface du mur. Cette pression est proportionnelle à la profondeur.

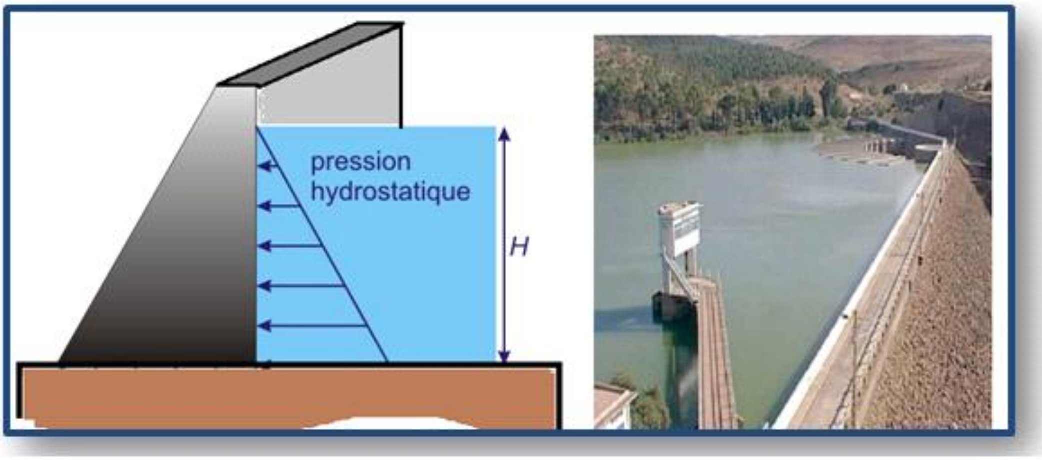


Figure 1.9

– forces volumique [N/m^3] : ces forces s'appliquent sur un volume

La force de pesanteur est une force volumique, car elle s'exerce sur les éléments de volume.

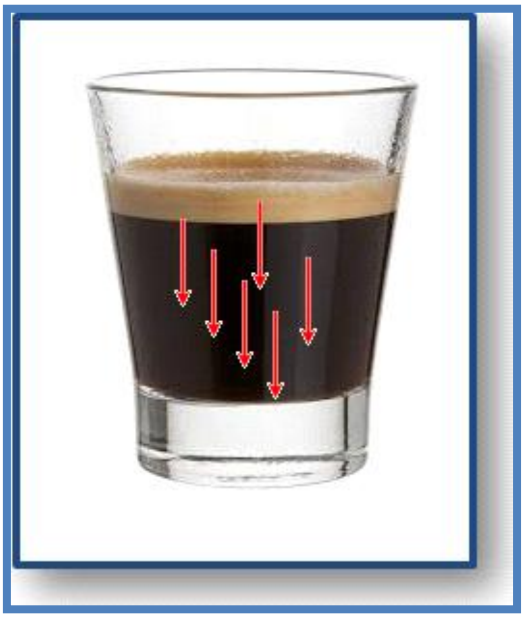


Figure 1.10

1.7.2 Forces de contact et réactions

Elles ne peuvent s'exercer qu'entre des corps en contact. Ex : le cahier sur la table (l'action mécanique exercée par la table sur le cahier empêche celui-ci de tomber).

La détermination des réactions d'appuis est nécessaire avant de faire une étude en RDM ; on doit chercher leurs points d'applications, leurs directions et leurs intensités.

Il existe trois types d'appuis:

Appuis simples : appuis ponctuels, de direction de réaction normale (Autour d'un tel appui, la poutre possède deux degrés de libertés : en rotation (Oz) et translation (Ox). Un seul inconnu **R=R**$_y$)

Figure 1.11

Appuis doubles ou articulations : malgré que le point d'application est connu mais la direction et l'intensité de la force de réaction sont les deux inconnues (Autour d'un tel appui, la poutre possède un seul degré de libertés : en rotation (Oz). Dans ce cas, la réaction d'appui **R** constituée de deux composantes (R_X et R_Y)).

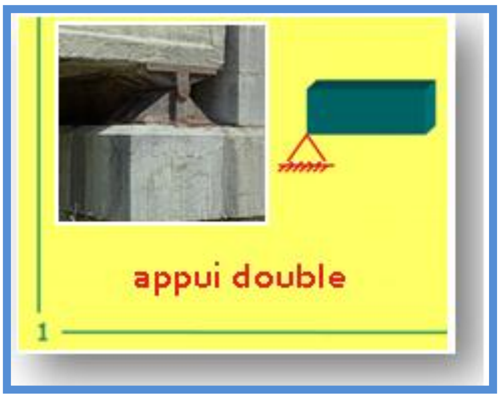


Figure 1.12

Appuis triples ou encastrement : Aucun degré de liberté n'existe pour la poutre dans ce type d'appui (Les inconnues sont d'une part le moment d'encastrement **M** et d'autre part la réaction d'appui **R** constituée de deux composantes (R_X et R_Y)).

Figure 1.13

Ces deux appuis ainsi que l'encastrement sont schématisés comme suit :

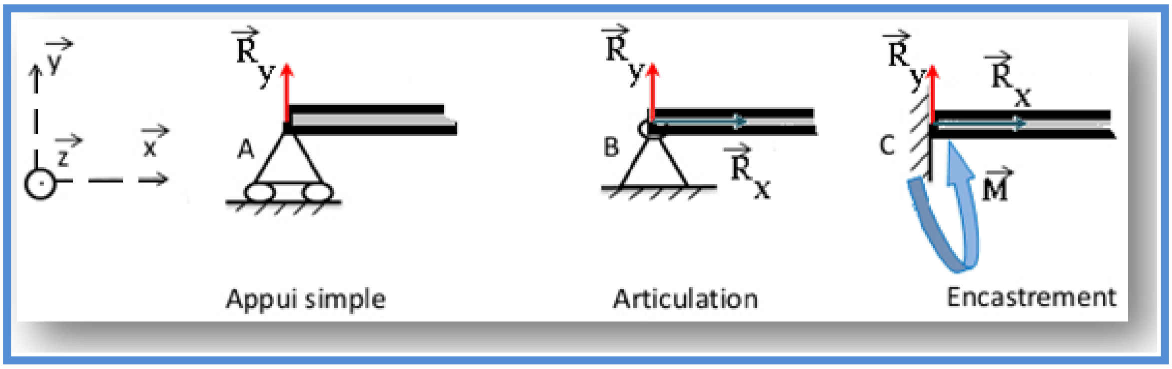


Figure 1.14

1.7.3 Forces internes

La résistance des matériaux suppose la maîtrise du principe de la statique. En statique, l'idéalisation d'un corps réel en corps rigide permet de déterminer en plus des forces externes les forces internes s'exerçant sur les structures porteuses uniquement à l'aide des conditions d'équilibre.

Les forces internes agissent entre différentes parties d'une même structure.

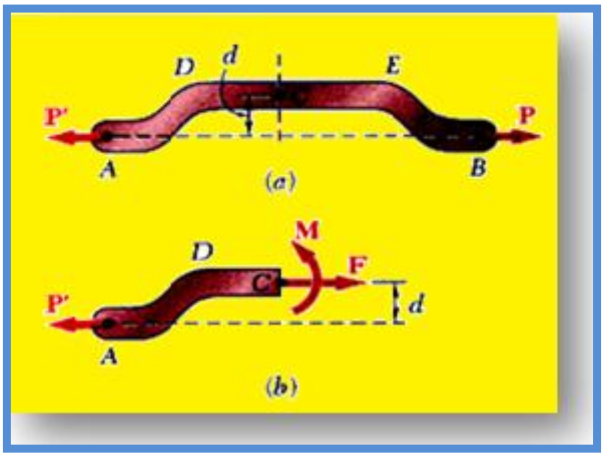


Figure 1.15

Quand un corps est soumis à un chargement, il développe des forces internes sur la matière formant le corps. Ces forces internes peuvent donc être mises en evidence en coupant le corps en deux ou plusieurs parties distinctes.

1.8 Liaisons

Les organes de liaison sont des dispositifs qui assurent la connexion de structures composées de plusieurs solides.

Figure 1.16

Les forces de liaison:
– forces qui s'exercent d'un solide à l'autre
– extériorisées par le principe de la coupe

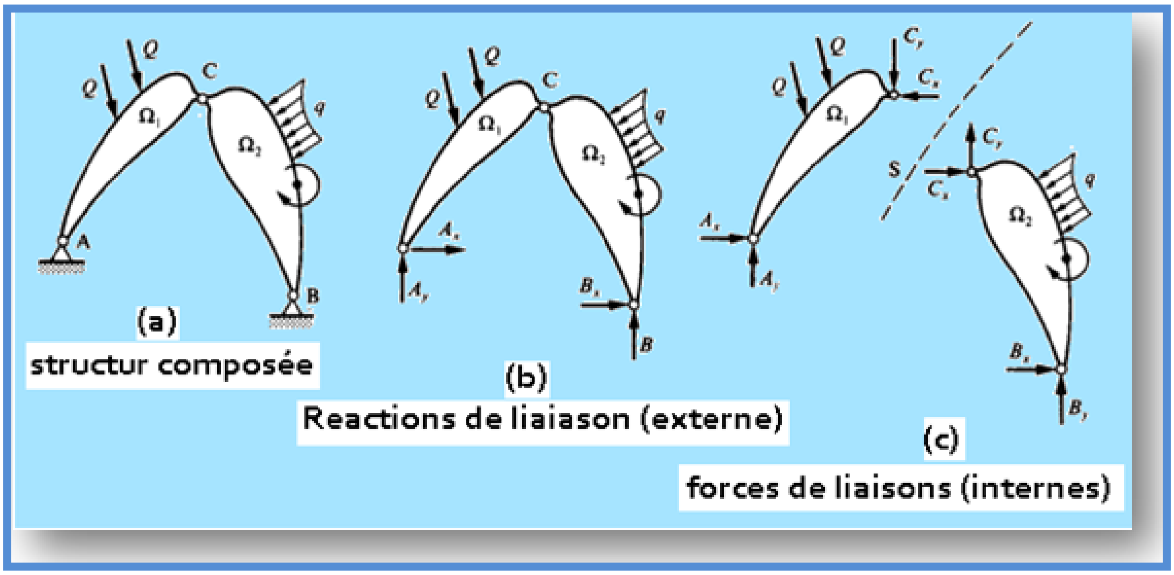

Q
Q
C
Ω1
Ω2
q
A
B
(a)
structur composée
Ax
Ay
Bx
B
(b)
Reactions de liaiason (externe)
Cy
Cx
S
(c)
forces de liaisons (internes)

Figure 1.17