Exercice 1

Solution

1.a. La valeur approchée de L est $L_0 = \frac{9+9,1+8,9+9+8,8}{5} = 8,96cm$.

La valeur approchée de l est $l_0 = \frac{6,2+5,9+6+6,2+6,1}{5} = 6,08cm$.

1.b. L'incertitude absolue sur L est

$\Delta L = \frac{|9-8,96|+|9,1-8,96|+|8,9-8,96|+|9-8,96|+|8,8-8,96|}{5} = 0,088cm$.

L'incertitude absolue sur l est

$\Delta l = \frac{|6,1-6,08|+|5,9-6,08|+|6-6,08|+|6,2-6,08|+|6,1-6,08|}{5} = 0,104cm$.

Maintenant, il faut arrondir ces résultats comme suit

$$L \simeq 8,96 \pm 0,088 \simeq 8,96 \pm 0,09cm \qquad l \simeq 6,08 \pm 0,104 \simeq 6,1 \pm 0,10cm.$$

1.c. La valeur approchée de P est $P_0 = 2(L_0 + l_0) = 2 \times (8,96 + 6,08) = 30,08cm$.

La valeur approchée de A est $A_0 = L_0 l_0 = 8,96 \times 6,08 = 54,477cm^2$.

1.d. Nous avons $P = 2(L + l)$, donc

$$dP = 2dL + 2dl \Rightarrow \Delta P = 2\Delta L + 2\Delta l = 0,38cm \Rightarrow \frac{\Delta P}{P_0} = \frac{0,38}{30,08} = 0,012633.$$

A ce stade, il faut arrondir les chiffres :

$$P \simeq 30,08 \pm 0,38 \simeq 30,1 \pm 0,4cm \simeq 30,1cm \pm 1,3\%.$$

De la même manière, nous avons $A = Ll$, d'où

$$dA = ldL + Ldl \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{A} = \frac{dL}{L} + \frac{dl}{l} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta A}{A_0} = \frac{\Delta L}{L_0} + \frac{\Delta l}{l_0} = 0,026492.$$

On en déduit que $\Delta A = 0,026492 \times A_0 = 1,4432$. Finalement,

$$A \simeq 54,477 \pm 1,4432cm^2 \simeq 54 \pm 1,4cm^2 \simeq 54cm^2 \pm 2,6\%.$$

2.a $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} \Rightarrow g_0 = 4\pi^2 \frac{L_0}{T_0^2} \Rightarrow g_0 = 4(3,1415)^2 \frac{0,997}{2,03^2}$

$\Rightarrow g_0 = 9,80996m/s^2$.

La différentielle de g est

$$dg = \frac{\partial g}{\partial L} dL + \frac{\partial g}{\partial T} dT \quad \Rightarrow \quad dg = \frac{4\pi^2}{T^2} dL - 8\pi^2 \frac{L}{T^3} dT$$

d'où l'incertitude absolue

$$\Delta g = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \Delta L + 8\pi^2 \frac{L_0}{T_0^3} \Delta T \quad \Rightarrow \quad \Delta g = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \Delta L + 8\pi^2 \frac{L_0}{T_0^3} \Delta T.$$

A.N.

$$\Delta g = \frac{4(3,1415)^2}{2,03^2} 0,005 + 8(3,1415)^2 \frac{0,997}{2,03^3} 0,01 = 0,141993 m/s^2.$$

Donc

$$g \simeq 9,80996 \pm 0,141993 m/s^2 \simeq 9,8 \pm 0,14 m/s^2 \simeq 9,8 m/s^2 \pm 1,5\%.$$

3.a. Nous avons

$$x = x_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad \ln x = \ln x_0 - \frac{t}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{t}{\ln x_0 - \ln x} \quad \Rightarrow \quad \tau = 10,386 s^{-1}.$$

La différentielle exacte de τ est

$$d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial t} dt + \frac{\partial \tau}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau}{\partial x_0} dx_0 = \frac{dt}{\ln x_0 - \ln x} + \frac{t dx}{x (\ln x - \ln x_0)^2} - \frac{t dx_0}{x_0 (\ln x - \ln x_0)^2}.$$

On en déduit que

$$\Delta \tau = \frac{\Delta t}{\ln x_0 - \ln x} + \frac{t \Delta x}{x (\ln x - \ln x_0)^2} + \frac{t \Delta x_0}{x_0 (\ln x - \ln x_0)^2}.$$

A.N :

$$\Delta \tau = \frac{0,01}{\ln 5,14 - \ln 4,53} + \frac{1,38 \times 0,02}{4,53 \times (\ln 4,53 - \ln 5,14)^2} + \frac{1,38 \times 0,02}{5,14 \times (\ln 4,53 - \ln 5,14)^2} = 0,75573 s^{-1}.$$

Finalement,

$$\tau \simeq 10,386 \pm 0,75573 s^{-1} \simeq 10,4 \pm 0,8 s^{-1} \simeq 10,4 s^{-1} \pm 7,7\%.$$

Solution part II Exercice 2

(1)_ Méthode différentielle totale

$$h = \frac{v^2 sin^2(\alpha)}{2g} \ \ et \ \ h_0 = \frac{v_0^2 sin^2(\alpha_0)}{2g}$$

$$dh = \frac{\partial h}{\partial v} dv + \frac{\partial h}{\partial \alpha} d\alpha = \frac{2v_0\, sin^2(\alpha_0)}{2g}\ dv + \frac{v_0^2\ 2\, sin(\alpha_0) cos\,(\alpha_0)}{2g}\ d\alpha = \frac{v_0\, sin^2(\alpha_0)}{g}\ dv + \frac{v_0^2\, sin(\alpha_0) cos\,(\alpha_0)}{g}\ d\alpha$$

On en déduit que

$$\Delta h = \frac{v_0\, sin^2(\alpha_0)}{g}\ \Delta v + \frac{v_0^2\, sin(\alpha_0) cos\,(\alpha_0)}{g}\ \Delta\alpha$$

Et

$$\frac{\Delta h}{h_0} = \frac{2}{v_0}\ \Delta v + \frac{2\, cos\,(\alpha_0)}{sin(\alpha_0)}\ \Delta\alpha$$

(2)_ Méthode différentielle logarithmique

$$h = \frac{v^2 sin^2(\alpha)}{2g} \Rightarrow ln(h) = ln\left(\frac{v^2 sin^2(\alpha)}{2g}\right) = ln\big(v^2 sin^2(\alpha)\big) - ln(\ 2g)$$

$$= ln(v^2) + ln\big(sin^2(\alpha)\big) - \ ln(2g)$$

$$= 2\ ln(v) + 2\ ln\big(sin(\alpha)\big) - \ ln(2g)$$

Donc :

$$d(ln(h)) = \frac{dh}{h} = d(2\ ln(v)) + d(2\ ln\big(sin(\alpha)\big)) - \ d\big(ln(2g)\big) = \frac{2}{v}\ dv + \frac{2\ cos\ (\alpha)}{sin(\alpha)}\ d\alpha$$

On en déduit que

$$\frac{\Delta h}{h_0} = \frac{2}{v_0}\ \Delta v + \frac{2\ cos\ (\alpha_0)}{sin(\alpha_0)}\ \Delta\alpha$$

A.N :

$$\frac{\Delta h}{h_0} = \frac{2}{3}\ 1 + \frac{2\ cos\ (1)}{sin(1)}\ 0.05 = \frac{2}{3}\ + \frac{cos\ (1)}{sin(1)}\ 0.1 = 0.73 = 73\ \%$$

Finalement,

$$h_0 = \frac{v_0^2 sin^2(\alpha_0)}{2g} = \frac{3^2\ sin^2(1)}{2x\ 9.8} = 0.325(m)$$

$$\Delta h = 0.73\ x\ 0.325 = 0.237\ (m)$$

$$h = 0.325 \pm 0.237\ (m) = 0325(m) \pm 73\ \%$$