Corrigé type série de TD n°1

Rappels Maths

Partie I : analyse dimensionnelle

Exercice 1.

- La surface :

On à [l]=L, [t]=T et [m]=M.

$S = l \times l \implies [S]=L.L=L^2 \implies [S]=L^2$ l'unité est (m^2)

- Le volume :

$V=l\times l\times l \implies [V]=L.L.L=L^3 \implies [V]=L^3$ l'unité est (m^3)

- La masse volumique :

$\rho = \frac{m}{V}$ donc $[\rho] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{M}{L^3} = ML^{-3} \implies [\rho]=M/L^3$ l'unité est (kg/m^3)

- La fréquence :

$f = \frac{1}{T} \implies [f] = \frac{1}{[T]} = \frac{1}{T} = T^{-1} \implies [f]=T^{-1}$ l'unité est (1/s ou Hertz)

- La vitesse linéaire :

$v = \frac{dx}{dt} \implies [v] = \frac{[x]}{[t]} = \frac{L}{T} = LT^{-1} \implies [v] = LT^{-1}$ l'unité est (m/s)

- L'accélération linéaire :

$a = \frac{dv}{dt} \implies [a] = \frac{[dv]}{[dt]} = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2} \implies [a] = LT^{-2}$ l'unité est (m/s^2)

- La force :

$F = m\times a \implies [F]=[m]\times[a]=M.L.T^{-2} \implies [F]=MLT^{-2}$ l'unité est ($kg.m/s^2$ ou Newton)

- Le travail :

$W = F\times d \implies [W]=[F]\times[d]=MLT^{-2}.L=ML^2T^{-2}$ l'unité est ($kg.m^2/s^2$ ou Joule)

- L'énergie :

$E_C = (½).m.\ v^2 \implies [E]=[1/2].[m].[v]^2 = ML^2T^{-2}$ l'unité est le Joule

Ou $E_p = m.g.h \implies [E]= [m].[g].[h]= MLT^{-2}L= ML^2T^{-2}$ l'unité est le Joule

- La puissance :

$P = W/t \implies [P]=[W]/[t]=(ML^2T^{-2})/T=ML^2T^{-3}$ l'unité est ($kg.m^2/s^3$ ou Watt)

- La pression :

$P = F/S \implies [P] = [F]/[S]=(MLT^{-2})/L^2=ML^{-1}T^{-2}$ l'unité est ($kg./m.s^2$ ou Pascal).

Tableau récapitulatif.

Grandeur physique	*Symbole de la grandeur*	*Formule utilisée*	*Dimension*	*Unité (SI)*
Surface	*S*	*S= l.l*	L^2	m^2
Volume	*V*	*V= l.l.l*	L^3	m^3
Masse volumique	ρ	*m/V*	ML^{-3}	Kgm^{-3}
Fréquence	*f*	*1/T*	T^{-1}	s^{-1}
Vitesse linéaire	*v*	*dx/dt*	LT^{-1}	ms^{-1}
Accélération linéaire	*a*	*dv/dt*	LT^{-2}	ms^{-2}
Force	*F*	*m.a*	MLT^{-2}	$Kgms^{-2}$
Travail	*W*	*F.d*	$ML^2\,T^{-2}$	Kgm^2s^{-2}
Energie	*E*	*(½)mv2*	ML^2T^{-2}	$Kg\,m^2s^{-2}$
Puissance	*P*	*W/t*	ML^2T^{-3}	Kgm^2s^{-3}
Pression	$\mathcal{P}$	*F/S*	$ML^{-1}T^{-2}$	$Kgm^{-1}s^{-2}$

Exercice 2.

On a $y = \frac{g}{2v_0^2}x^2 + h\ \ldots\ldots(*)$

L'équation (*) est homogène si : $[y] = \left[\frac{g}{2v_0^2}x^2\right] = [h]$

Sachant que $\begin{cases} [g] = LT^{-2} \\ [v_0] = LT^{-1} \\ [x] = L \\ [h] = [y] = L \end{cases}$

On a $[y] = [h]$=L donc il suffit de vérifier que $\left[\frac{g}{2v_0^2}x^2\right] = L$

$$\Longrightarrow \left[\frac{g}{2v_0^2}x^2\right] = \frac{[g].[x]^2}{[2][v_0]^2} = \frac{LT^{-2}L^2}{L^2T^{-2}} = L$$

Donc l'équation (*) est homogène.

Exercice 3.

On a $F = 6\pi\eta r v$

1- $[\eta] = ?$

$$F = 6\pi\eta r v \implies \eta = \frac{F}{6\pi r v}$$

$[\eta] = \frac{[F]}{[r][v]}$ avec $\begin{cases} [r] = L \\ [F] = MLT^{-2} \\ [v] = LT^{-1} \end{cases}$

D'où

$$[\eta] = \frac{MLT^{-2}}{L.LT^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}$$

2- On a $v = a\left(1 - exp\left(-\frac{t}{b}\right)\right)$

Cherchons les dimensions[a] et [b]

L'argument de l'exponentielle est sans dimension donc :

$$[-\frac{t}{b}]=1 \Rightarrow [-t] = [t] = [b] \; nous \; avons \; [-1] = 1$$

$[b] = T$ et $v = a . (1- e^{-t/b})$, $[1 - e^{-t/b}]=1$

donc $[v] = LT^{-1} = [a]$

$\implies [a]=LT^{-1}$

Exercice 4.

On a $v = k\rho^x\chi^y$ donc $[v] = [k][\rho]^x[\chi]^y$.

avec $\begin{cases} [v] = LT^{-1} \\ [k] = 1 \\ [\rho] = ML^{-3} \\ [\chi] = \frac{1}{[p]} = M^{-1}LT^{+2} \end{cases}$

$$\implies [v] = LT^{-1} = (ML^{-3})^x(M^{-1}LT^2)^y$$

$$\implies M^0LT^{-1} = M^xL^{-3x} \quad M^{-1y}L^yT^{2y}$$

$$\implies M^0LT^{-1} = M^{x-y}L^{-3x+y} \quad T^{2y}$$

$$\implies \begin{cases} x - y = 0 \\ -3x + y = 1 \\ 2y = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = y = -\frac{1}{2} \\ y = -1/2 \end{cases} \implies v = k\rho^{-1/2}\chi^{-1/2} = \frac{k}{\sqrt{\rho\chi}}$$

Alors

$$v = \frac{k}{\sqrt{\rho\chi}}$$