Résumé

Calcul d'erreurs et évaluation des incertitudes

Rappel 1

On sait que toute grandeur physique G mesurée peut s'écrire sous la forme suivante :

$G_{réelle} = G_{mesurée} \pm \Delta G$ (unités) **Ou bien** $G = G_0 \pm \Delta G$ (unités)

Avec :

- ✓ G : ***Valeur réelle***
- ✓ G_0 : ***Valeur mesurée***
- ✓ ΔG : ***incertitude absolue***

$\frac{\Delta G}{G_0}$: ***représente l'incertitude relative ou la précision de la mesure. Ce rapport est sans dimension.***

- ➢ ΔG ***est une grandeur positive et à la même dimension que G.***
- ➢ ***Plus*** $\frac{\Delta G}{G_0}$ ***est petit, plus la précision de la mesure est grande.***

***Rappel 2 :* Règles de cohésion**

- ➢ ***Il est indispensable que la mesure et l'incertitude absolue aient le même nombre de chiffres après la virgule.***
- ➢ ***Dans l'écriture scientifique, il faut mettre un entier non nul avant la virgule qu'on multiplier par*** 10^x ***et*** $x \neq 0$.

Exemples : $t = 1{,}245.10^6$ ***s ou*** $m = 4{,}25.10^{-8}$ ***kg***

I. calcul et Evaluation des incertitudes

I.1 *Calcul d'incertitudes sur une mesure directe*

I.1.1 Cas d'une mesure directe unique.

A titre d'illustration, si la mesure de la température d'un corps donné fournit comme valeur mesurée (approchée) égale à 37, 2°C (degré Celsius) et qu'on estime qu'avec l'instrument utilisé, l'erreur absolue ne dépasse pas 0.2°C, l'encadrement de la valeur réelle de la température visée sera : 37, 2 - 0, 2≤ T ≤ 37, 2 + 0, 2 (°C)

Soit : 37, 0 ≤ T ≤ 37, 4 (°C) Ou bien : T = 37, 2 ± 0, 2 °C

Dans cet exemple, la précision de la mesure est de : ΔT/T = 0.2/37.2 = 0.00537= 0.005 ou 0.5%.

Avec une valeur mesurée d'ordre de grandeur plus faible, 2.6°C par exemple, la même procédure de mesure donnerait une incertitude relative plus importante (0.2/2.6=0.076 = 0.8), ou bien 8%, ce qui correspond à une précision de mesure moins bonne.

I.1.2 Cas d'une mesure directe répétée.

Si une grandeur G peut être mesurée N fois, ce qui va donner une suite de résultats G_1*;* G_2*; ...;* G_N *, la valeur approchée* G_0 *de la grandeur G peut être prise comme étant la moyenne de ces résultats :*

$$G_{moy} = \frac{G_1 + G_2 + \cdots G_{N-1} + G_N}{N}$$

Dans ce cas, l'incertitude absolue ΔG *peut-être estimée par trois méthodes différentes :*

$- \Delta G = \max_{n=1,N}\{|G_n - G_{moy}|\}$ *(L'écart maximal)*

$- \Delta G = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|G_n - G_{moy}|$ *(L'écart absolu)*

$- \Delta G = \frac{1}{N}\sqrt{\sum_{n=1}^{N}\left(G_n - G_{moy}\right)^2}$ *(L'écart-type)*

Exemple

Cinq étudiants se sont relayés pour mesurer le diamètre D d'un disque compact (CD), en mm, ils trouvent les valeurs suivantes : 101,00 ; 102,30 ; 99,80 ; 100,90 ; 98,50.

1. Donner le résultat de cet ensemble de mesures par deux méthodes différentes.
2. Quelle est la précision de mesure dans chaque cas.
3. Déterminer l'intervalle de confiance de cette mesure pour l'une des méthodes utilisées.

Réponse

Calcul de la moyenne des valeurs trouvées : $\overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{5} D_i}{5}$

Application Numérique :

$$\overline{D} = \frac{101,+102{,}30 + 99{,}80 + 100{,}90 + 98{,}50}{5} = 100{,}5\ (mm)$$

Dans cette expérience l'incertitude absolue ΔD *peut se calcule par deux méthodes différentes :*

a. ***Selon la Méthode de l'écart maximal :***

$$\Delta D = max\{|101{,}0 - 100{,}5|; |102{,}3 - 100{,}5|; |99{,}80 - 100{,}5|; |100{,}9 - 100{,}5|; |98{,}50 - 100{,}5|\}$$

ΔD*= 1,8 (mm)*

Donc, le résultat de la mesure s'écrit :

$D = \overline{D} \pm \Delta D = 100{,}5 \pm 1{,}8$ *(mm)*

b. ***Selon la Méthode de l'écart moyen :***

$$\Delta D = \frac{\{|101{,}0 - 100{,}5| + |102{,}3 - 100{,}5| + |99{,}80 - 100{,}5| + |100{,}9 - 100{,}5| + |98{,}50 - 100{,}5|\}}{5}$$

Aors, $\Delta D = 1{,}08 \quad (mm)$

Donc, le résultat de la mesure s'écrit :

$D = \overline{D} \pm \Delta D$ *= 100,5± 1,08 (mm)*

2. ***La précision de la mesure est représentée par le rapport*** $\frac{\Delta D}{\overline{D}}$.

a- *Selon la méthode de l'écart maximal* ***:*** $\frac{\Delta D}{\overline{D}} = \frac{1.8}{100{,}5}$ *=1,8 %*

b- *Selon la méthode de l'écart moyen :* $\frac{\Delta D}{\overline{D}} = \frac{1.08}{100{,}5} = 1\%$

On note que le résultat de la mesure selon la méthode de l'écart moyen est plus précis que celui obtenu par l'écart maximal.

3. ***Par définition de l'intervalle de confiance*** : $D \in [\overline{D} - \Delta D; \overline{D} + \Delta D\ ]$

Selon la méthode de l'écart moyen, par exemple, la vraie valeur du diamètre mesurée est appartient à l'intervalle : $D \in [100{,}5 - 1{,}08; 100{,}5 + 1{,}08\ ] \equiv\ [99{,}42; 101{,}58]$

I.2 Calcul des incertitudes pour les mesures indirectes

- *Rappel 3 :*
- *La notation de leibniz de la dérivée est :* $df(x) = f'(x)dx$ *où* $f'(x)$ *est la fonction dérivée.*
- *Soit une fonction* $f(x,y,z)$*, la différentielle totale* $df(x,y,z)$ *de cette fonction est donnée par la relation :*
- $df(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}.dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z}.dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}.dz$

Où $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}$ *est la dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable x, les autres variables étant maintenues fixes lors du calcul de cette dérivée.*

Soit une deuxième fonction $g(x,y)$*, la différentielle totale* $dg(x,y)$ *de cette fonction s'écrit :*

$$dg(x,y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y.dx + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x.dy$$

- *Prenons une troisième fonction* $h(x)$ *ne contenant qu'une seule variable x, on écrit :* $dh(x) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right).dx = \left(\frac{dh}{dx}\right).dx = h'(x)dx$

1. *On note ici, que la dérivée de* $h(x)$ *par rapport à x se confond avec sa dérivée partielle.*
2. *On dit alors, qu'on ne peut parler de différentielle d'une fonction, que si cette fonction comporte au moins deux variables.*

La mesure est appelée indirecte si la grandeur mesurée X est e à partir des résultats des mesures directes de plusieurs grandeurs intermédiaires. Cette méthode consiste à utiliser deux ou plusieurs appareils de mesure. La grandeur Inconnue est déterminée par une expression mathématique qui fait intervenir les grandeurs mesurées. La petite question qui se pose maintenant, est comment on peut déterminer les incertitudes ΔX *et* $\frac{\Delta X}{X_0}$.

En d'autres termes, si X s'obtient par la relation :

$X = f(A,B,C)$ *où* $A = A_0 \pm \Delta A$, $B = B_0 \pm \Delta B$ *et* $C = C_0 \pm \Delta C$ *;*

- la fonction X doit être croissante ou décroissante dans l'intervalle considéré.

- les incertitudes relatives sont faibles (< 10%)

- La valeur approchée de X est : $X_0 = f(A_0, B_0, C_0)$

L'incertitude commise sur la mesure de cette grandeur, ΔX *(*$\frac{\Delta X}{X_0}$*), peut être exprimée en fonction des incertitudes absolues* ΔA, ΔB, ΔC *en appliquant l'une des méthodes suivantes :*

a. Méthode de la différentielle totale :

Nous prenons la différentielle totale de X :

$$dX = \frac{\partial f}{\partial A}dA + \frac{\partial f}{\partial B}dB + \frac{\partial f}{\partial C}dC$$

Nous remplaçons les différentiels dA, dB, dC par les incertitudes absolues ΔA, ΔB, ΔC et nous prenons les valeurs absolues des drivées partielles.

$$\Delta X = \left|\frac{\partial f}{\partial A}\right|_{A_0,B_0,C_0} \Delta A + \left|\frac{\partial f}{\partial B}\right|_{A_0,B_0,C_0} \Delta B + \left|\frac{\partial f}{\partial C}\right|_{A_0,B_0,C_0} \Delta C$$

Pour obtenir l'incertitude relative, il suffit de diviser la dernière équation par X_0.

$$\frac{\Delta X}{X_0} = \frac{1}{|f(A_0,B_0,C_0)|}\left(\left|\frac{\partial f}{\partial A}\right|_{A_0,B_0,C_0} \Delta A + \left|\frac{\partial f}{\partial B}\right|_{A_0,B_0,C_0} \Delta B + \left|\frac{\partial f}{\partial C}\right|_{A_0,B_0,C_0} \Delta C\right)$$

Cas des opérations simples

Dans le cas des opérations simples, si la variation de la quantité A est monotone et les incertitudes sont faibles, on peut appliquer les règles suivantes pour le calcul d'incertitudes.

Règle no. 1

Si $A = B \pm C$ *alors* $\Delta A = \Delta B + \Delta C$

Règle no. 2

Si $A = B.C$ *alors* $\frac{\Delta A}{|A|} = \frac{\Delta B}{|B|} + \frac{\Delta C}{|C|}$

Si $A = \frac{B}{C}$ alors $\frac{\Delta A}{|A|} = \frac{\Delta B}{|B|} + \frac{\Delta C}{|C|}$

Règle no. 3

Si $A = B^C$ *alors* $\frac{\Delta A}{|A|} = |c| \frac{\Delta B}{|B|}$

Attension !!

Avant de passer à la notation absolue, on doit regrouper les coefficients de chaque variable :

Exemple illustratif :

Soit la différentielle suivante : $\boldsymbol{df = A.dX + B.dY - CdX} \quad (*)$

Cas 1 : on met $(\boldsymbol{dX})$ ***en facteur, avant de passer à la notation absolue.***

$(*) \quad \Rightarrow \boldsymbol{df = (A - C)dX + B.dY} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Delta f = |A - C|\Delta X + |B|.\Delta Y}$ ***Vrai***

Cas 2 : on passe directement à la notation absolue.

$(*) \quad \Rightarrow \boldsymbol{df = |A|\Delta X + |B||dY| + |-C|\Delta X} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Delta f = |A + C|\Delta X + |B|.\Delta Y}$ ***Faux***

Exercice :

La quantité de mouvement d'un corps de masse m et de vitesse v est donnée par l'expression suivante : p = mv.

Si $m = (2.0 \pm 0.1)g$ *et* $v = (1.6 \pm 0.2)m/s$.

- *Donnez la valeur de p et estimez l'incertitude absolue sur celle-ci ?*

Réponse :

$$\Rightarrow dp = \frac{\partial p}{\partial m} dm + \frac{\partial p}{\partial v} dv$$

Avec $\frac{\partial p}{\partial m} = v$ *et* $\frac{\partial p}{\partial v} = m$

$\Rightarrow dp = vdm + mdv$

$\Rightarrow \Delta p = |v|\Delta m + |m|\Delta v$

A.N. $\Delta p = 0{,}36\ gm/s$

$p_0 = 3{,}2\ gm/s$ *Valeur calculée.*

$p = p_0 \pm \Delta p = (3{,}2 \pm 0{,}4)10^{-3} kgm/s$

b. *Méthode de la différentielle logarithmique :*

Dans certains cas, multiplication ou division, nous pouvons appliquer la méthode de la différentielle logarithmique qui consiste à prendre le logarithme de la grandeur donnée, puis sa différentielle, puis on prend la valeur absolue des expressions obtenues en remplaçant tous les différentiels (d) par les incertitudes absolues (Δ) et les signes – par les signes +.

- ***Exemple illustratif :***

Soit à considérer le produit $\boldsymbol{f = k\, X^n Y^p Z^q}$ en fonction des variables indépendantes X, Y et Z avec des incertitudes absolues ΔX, ΔY et ΔZ respectivement. $\boldsymbol{K}$ est une constante connue avec exactitude et n, p et q des nombres réels constants (positifs ou négatifs).

Pour trouver l'incertitude absolue Δf, en fonction de $\Delta X, \Delta Y$ et ΔZ , en utilisant la méthode la différentielle logarithmique, on suit les étapes suivantes :

Etape 1 : on introduit le logarithme sur la fonction donnée, puis on simplifie au maximum :

$$\boldsymbol{lnf = ln(k\, X^n Y^p Z^q) = ln(k) + nln(X) + pln(Y) + qln(Z)}$$

Etape 2 : on dérive la relation simplifiée, sachant que : $\boldsymbol{d[lnx] = \frac{dx}{x}}$

$$\boldsymbol{d[lnf] = d[ln(k) + nln(X) + pln(Y) + qln(Z)]}$$
$$\boldsymbol{= d[ln(k)] + nd[ln(X)] + pd[ln(Y)] + qd[ln(Z)]}$$
$$\boldsymbol{\Rightarrow \frac{df}{f} = n\frac{dX}{X} + p\frac{dY}{Y} + q\frac{dZ}{Z}}$$

Etape 3 : on passe à la notation absolue.

$$\boldsymbol{\frac{\Delta f}{f} = |n|\frac{\Delta X}{|X|} + |p|\frac{\Delta Y}{|Y|} + |q|\frac{\Delta Z}{|Z|} \qquad \Rightarrow \Delta f = |f|\left(|n|\frac{\Delta X}{|X|} + |p|\frac{\Delta Y}{|Y|} + |q|\frac{\Delta Z}{|Z|}\right)}$$

Exercice :

La résistance d'un conducteur cylindrique R varie avec la section S et la longueur l selon la formule suivante :

$$\mathrm{R} = \rho\frac{l}{s}$$

- *Calculer l'incertitude relative sur la mesure de R si la section augmente de 4% et la longueur augmente de 1% ?*

Réponse

$\mathrm{R} = \rho\frac{l}{s}$ $\quad$ *avec* $\frac{\Delta l}{l} = 0{,}01$ *et* $\frac{\Delta s}{s} = 0{,}04$

$$\mathrm{lnR} = \ln\left(\rho\frac{l}{s}\right) = ln\rho + lnl - lns$$

$$d[\mathrm{lnR}] = \mathrm{d}\left[\ln\left(\rho\frac{l}{s}\right)\right] = d[ln\rho + lnl - lns] = dln\rho + dlnl - dlns = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dl}{l} - \frac{ds}{s}$$

$$d[\mathrm{lnR}] = \frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dl}{l} - \frac{ds}{s} \Longrightarrow \frac{\Delta R}{R} = \frac{d\rho}{|\rho|} + \frac{dl}{|l|} + \frac{ds}{|s|}$$

A.N $\qquad \frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta\rho}{|\rho|} + \frac{\Delta l}{|l|} + \frac{\Delta s}{|s|} = 0{,}00 + 0{,}01 + 0{,}04 = 0{,}05 = 5\%$

N.B : Conduite à suivre pour le calcul d'incertitude pour une mesure indirecte.

1. Déterminer l'Expression algébrique des erreurs par les différentielles totales ou par les différentielles Logarithmiques.

2. regroupement des termes semblables lorsque des erreurs liées interviennent.

3. Passage aux incertitudes absolues (remplacer les différentielles par les incertitudes absolues et en prenant la valeur absolue des coefficients).

4. Calcul numérique et représentation du résultat de la mesure.

Exercice d'entraînement.

Pour calculer l'accélération terrestre g avec un pendule, on mesure la longueur du pendule l ainsi que la période d'oscillation T et on utilise la loi :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ avec\ l = 1.552 \pm 0{,}002\ [m]\ et\ T = 2{,}50 \pm 0{,}02[s]$$

- *Calculer g avec son incertitude relative ainsi que son incertitude absolue en utilisant la méthode de la différentielle logarithmique.*

Réponses :

a. $g = 9{,}80[m/s^2]$

b. $\frac{\Delta g}{g} = 1{,}7\%$

c. $\Delta g = 0{,}17[m/s^2]$

d. $g = 9{,}80 \pm 0{,}17[m/s^2]\ (donc\ g\ est\ compris\ entre\ 9{,}63\ et\ 9{,}97\ [m/s^2])$