Chapitre1

ELEMENTS DE CALCUL VECTORIEL

1.1 DÉFINITIONS ÉMENTAIRES

a- Vecteur

Un vecteur est une quantité qui possède une direction ainsi bien qu'une valeur absolue(ou module).

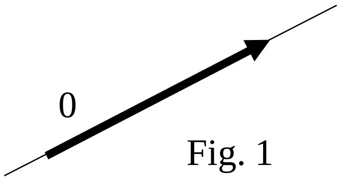


Fig. 1

Pour déterminer un vecteur on doit savoir trois éléments :

-Le point d'application.

-La direction, le sens.

-Le module (la valeur absolue).

Si la valeur absolue d'un vecteur est zéro nous disons que nous avons un vecteur nul.

Un vecteur unitaire est un vecteur de longueur unité.

Nous adapterons la notation vectorielle comme suivent :

Un vecteur nommé A est représenté en mettant une flèche sur la lette ($\vec{A}$).

La valeur absolue d'un vecteur est toujours écrite en caractère mince A ou bien /**A**/, ou/$\vec{A}$/.

Par définition, toute quantité dont la valeur ne dépend pas du système de coordonnées est un scalaire. Par exemple, la valeur absolue d'un vecteur est un scalaire. La coordonnée x d'un point fixe n'est pas un scalaire, car la valeur de la coordonnée x dépend du choix de la direction de l'axe x. La température T est un scalaire, la vitesse $\vec{V}$d'une automobile est un vecteur.

b- Egalité des vecteurs

Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont égaux par définition s'ils ont même *direction* et même valeur absolue.

Un vecteur ne possédé pas nécessairement une position, bien qu'un vecteur puisse référer à une quantité définie en un point particulier. Les deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sur la figure ci-contre sont égaux.

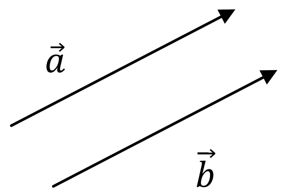


Fig. 2

e- Les composantes de vecteur.

Les systèmes de coordonnées cartésiennes jouent un rôle privilège en physique à cause de la grande simplicité. Il est élégant et économique de de discuter les lois de physique en termes de vecteurs, mais en fin de compte nous devons évaluer les conséquences des lois physique dans les conditions particulières il sera utile pour cela de représenter les vecteurs dans des systèmes coordonnées particuliers les plus utiles ce sont des systèmes de coordonnées cartésienne. On les définit à partir de trois vecteurs unitaires perpendiculaires deux a deux $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$, ou $\hat{x}$, $\hat{z}$ et $\hat{z}$ sont les vecteurs unitaires le long des axe x, y, z du système ses coordonnées cartésien (voir figure 3). Certains préfèrent écrire $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ comme vecteurs unitaires dans le système de coordonnées cartésienne. La direction de $\hat{z}$ (ou $\vec{k}$) par rapport à celles de $\hat{x}$ (ou $\vec{\imath}$) et de y (ou $\vec{\jmath}$) est définie parle règle de la vie (voir figure 4).

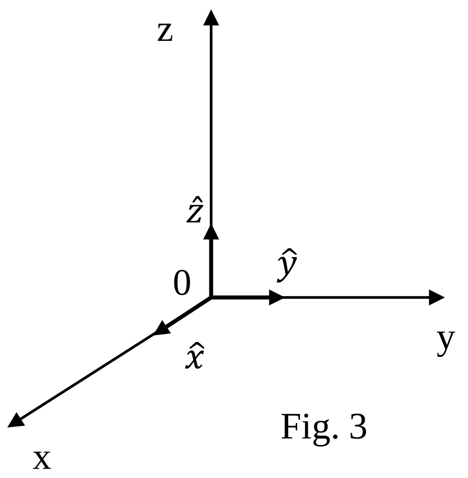


Fig. 3

Fig. 4

On peut écrire tout vecteur sous la forme :

$$A = Ax\hat{X} + Ay\hat{Y} + Az\hat{Z}$$

$$(\text{Ou } \vec{A} = Ax\vec{\imath} + Ay\vec{\jmath} + Az\vec{k})$$

Ax, Ay, Az Sont appelés les composants du vecteur A.

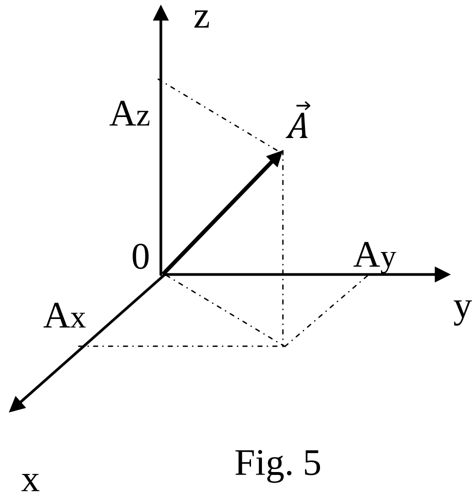


Fig. 5

Si nous savon que le vecteur se situe dans un plan, dans ce cas notre vecteur aura deux composantes seulement (on travaille dans l'espace a deux dimension) figure 6.

$$\vec{b} = Bx\vec{\imath} + By\vec{\jmath}$$

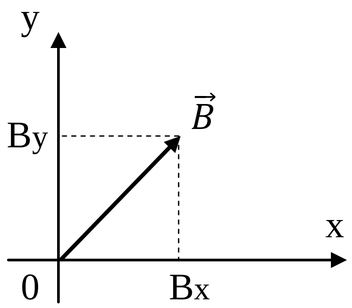


Fig. 6

1.2 OPERATION SUR LES VECTEURS

a) multiplication d'un vecteur par un scalaire.

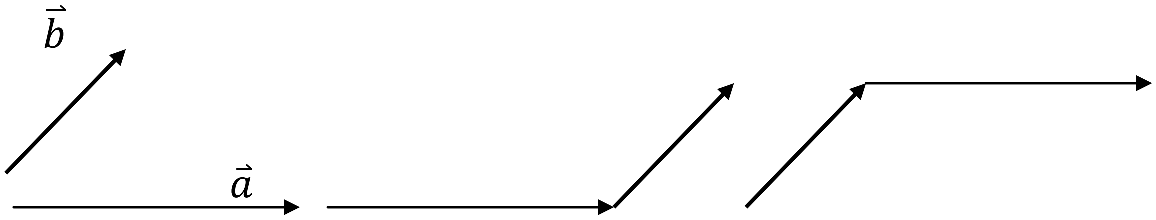
Quand nous multiplions un vecteur par un scalaire k nous obtenons un vecteur de même direction mais sa valeur absolue et de k fois de plus. Si K est un scalaire on a.

$$K(\vec{a}+\vec{b}) = k\,\vec{a} + k\,\vec{b}$$

Donc la multiplication d'un vecteur par un scalaire et distributive.

b) Addition des vecteurs.

La somme de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est par definition la construction géométrique montrée sur la fig.7 .On appelle souvent cette construction loi des parallélogrammes pour l'addition des vecteurs.



La somme vectorielle $\vec{a}$+$\vec{b}$ La somme vectorielle $\vec{b} + \vec{a}$

Fig.7

On définit la Somme $\vec{a}$+$\vec{b}$ en déplaçant B parallèlement à lui-même jusqu'à ce que l'origine de B coïncide avec l'extrémité de $\vec{a}$ .Le vecteur tracé entre l'origine de $\vec{a}$ et l'extrémité de $\overrightarrow{b}$ est la Somme $\vec{a}$+$\vec{b}$. D'après la fig 7, en voit que

$$\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$$

L'addition des vecteurs et donc commutative.

c- Soustraction de vecteurs.

La soustraction de deux vecteurs est définie sur la figure suivante :

Vecteur $\vec{b}$ et - $\vec{b}$

Formation de $\vec{a}$ - $\vec{b}$
soustraction vectorielle

Fig. 8

L'addition des vecteurs satisfait la relation

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

Elle est donc associative, La somme d'un nombre fini de vecteur est in dépendent de l'ordre dans lequel on l'effectuer. Si $\vec{a}$ - $\vec{b}$= $\vec{c}$, en ajoutent $\vec{b}$ de chaque côté, on obtient $\vec{a}$ = $\vec{b}$ + $\vec{c}$. On peut donc manipuler les sommes différentes de vecteurs comme des nombres. Si les vecteurs sont donnés selon leurs composantes, par exemple :

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}$$

Alors

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\, \vec{\imath} + (a_y + b_y)\, \vec{\jmath} + (a_z + b_z)\, \vec{k}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\, \vec{\imath} + (a_y - b_y)\, \vec{\jmath} + (a_z - b_z)\, \vec{k}$$

1.3 <u>ANALYSE VECTORIELLE</u>

a- Produit scalaire de deux vecteurs

i) Définition : Le produit scalaire (noté $\vec{a}$. $\vec{b}$ et nous lisons comme $\vec{a}$ scalaire $\vec{b}$) de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est un scalaire égal au produit de leur modules (valeur absolue) des vecteurs / $\vec{a}$/ et / $\vec{b}$ /, multiplié par le cosinus de l'angle qu'ils forment.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = / \vec{a} / \; / \vec{b} / \cos \alpha$

$\alpha = (\vec{a}, \vec{b})$, voir fig. 9

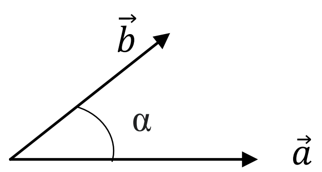


fig. 9

Il est facile de déduire que $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

ii) Propriétés du produit scalaire de deux vecteurs.

1. Le produit scalaire est un nombre algébrique positif au négatif suivant la valeur de l'ongle α, ce n'est pas un vecteur. Si l'angle α et compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ cos α et $\vec{a}\,.\,\vec{b}$sont des nombres négatifs.
2. Le produit scalaire est nul si les deux vecteur sont perpendiculaire, ou se l'un des vecteur est nul (vecteur nul).

$$\text{Cos}\frac{\pi}{2} = 0 \longrightarrow \vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$$

(Voir fig. 10)

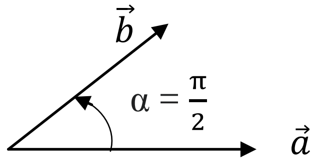


fig. 10

3. Le module / $\vec{a}$ / d'un vecteur $\vec{a}$(la valeur absolue est positif est égal à la racine carrée de son produit scalaire par lui-même; en effet,

$\vec{a}.\,\vec{a} = /\vec{a}/\ /\vec{a}/ \cos 0° = /\vec{a}/\ /\vec{a}/ = /\vec{a}/^2$

D'où $\qquad /\vec{a}/ = \sqrt{\vec{a}.\,\vec{a}}$

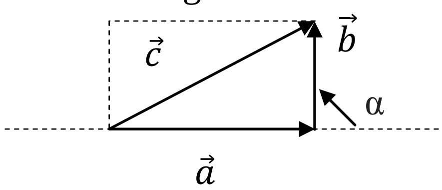
4. Relation entre les modules d'une somme des vecteurs :

Si $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ on a (fig. 11)

$\vec{c}.\,\vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} + \vec{b})$

$= \vec{a}.\,\vec{a} + \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\,\vec{a} + \vec{b}.\vec{b}$

fig. 11



$/\vec{c}/^2 = /\vec{a}/^2 + /\vec{b}/^2 + 2/\vec{a}/.\ /\vec{b}/ \cos\alpha$

Remarque : $\qquad \vec{\imath}.\vec{\imath} = \vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \vec{k}.\vec{k} = 1$

$\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{\imath} = 0$

(voir fig. 12)

Si on a deux vecteurs écrits

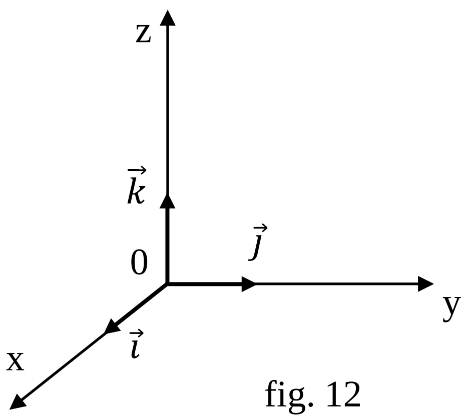


fig. 12

selon leurs composantes dans un système de coordonne cartésiennes a trois dimensions

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}$$

Alors $$\vec{a}.\vec{b} = (a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}).(b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k})$$

$$= a_xb_x + a_y\,b_y + a_zb_z = \sum_{i = x,y,z} a_i.b_i$$

Il est facile de démontrer que

$$= \vec{c}\,(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{c}.\vec{a} + \vec{c}.\vec{b}$$

- Exemple de produit scalaire
  Comme nous verrons ou dessous
  Travail = $\overrightarrow{Force}.\overrightarrow{Déplacement}$
  dw= $\vec{F}.\,\vec{dl}$ = $/\vec{F}/./\vec{dl}/$ cos α (Voir fig. 12)

b- Produit vectoriel de deux vecteurs.

i) Définition : Le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur (noté$\vec{a}$x $\vec{b}$) dans la direction est Perpendiculaire à la fois à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$,dont le sens est tel que les vecteurs $\vec{a}$,$\vec{b}$et$\vec{a}$x $\vec{b}$forme un trièdre direct et dont la valeur algébrique est égal à $/\vec{a}//\vec{b}/$ sinα avec α = ($\vec{a},\vec{b}$)
(Voir fig. 14)

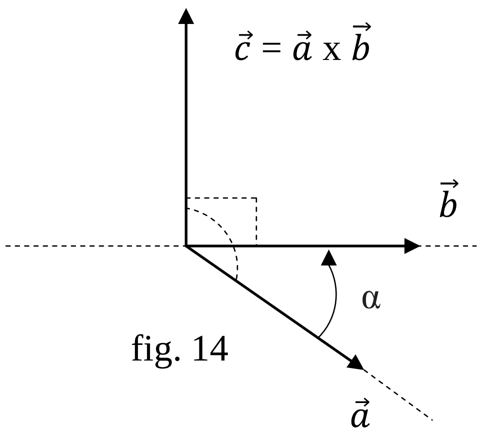


fig. 14

ii) Propriété du produit vectoriel de deux vecteurs .

1- Dons le cas vulgaire, sans intérêt, ou l'un de deux vecteurs$\vec{a}$ Où$\vec{b}$ est nul, le produit vectoriel est nul. Le produit vectoriel ne peut être nul que si

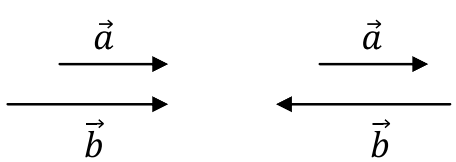


fig. 15

α=0ou π, c'est-à-dire si les vecteurs $\vec{a}$et$\vec{b}$sont parallèles ou antiparallèle (fig. 15)

En particulier, Le produit vectoriel d'un vecteur $\vec{v}$ par lui méme est toujours nul $\vec{v}$ x $\vec{v}$ = 0, parce que α = 0, sin α =0

2. Le produit vectoriel n'est pas commutatif ; on a

$$\vec{a} \times \vec{b} = - \vec{b} \times \vec{a}$$

C'est claire parce que par définition

$$\vec{a} \times \vec{b} = /\vec{a}//\vec{b}/ \sin \alpha \qquad \alpha = (\vec{a},\vec{b})$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = /\vec{b}//\vec{a}/ \sin (- \alpha) \qquad - \alpha = (\vec{b},\vec{a})$$

3. Le produit vectoriel est distributif par rapport a l'addition vectorielle (attension a l'ordre des facteurs)

$$\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}$$

Et $$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

4. Il est associatif pour la multiplication par un scalaire

$$m (\vec{a} + \vec{b}) = (m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b})$$

5. En fin, d'après la définition du produit vectoriel de celles des Vecteur unitaires du système de coordonnees cartésiennes, nous avons les relations (Voir fig. 16)

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = - \vec{k}, \vec{k} \times \vec{j} = - \vec{i}, \vec{i} \times \vec{k} = - \vec{j}$$

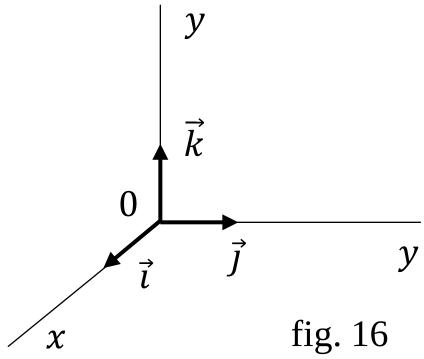


fig. 16

iii) Quelques applications du produits Vectoriel

1. Représentation analytique de produit vectoriel

considérons, dans l'espace orienté au moyen d'un système de coordonnées (voir fig.16) deux vecteurs tels que :

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

Compte tenu des propriétés du produit vectoriel que nous venons de donner dans le point b- il est facile d'effectuer le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et déduire de cela sa représentation analytique

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k})$$
$$= (a_yb_z - a_z\, b_y)\,\vec{\imath} + (a_z\, b_x - a_x\, b_z)\,\vec{\jmath} + (a_xb_y - a_yb_x)\,\vec{k}$$

Cette Derrière expression peux aussi s'écrire sous la forme plus simple d'une déterminant symbolique

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

2. Moment d'une force par rapport a un point

au-dessus nous donnerons une définition précise des forces et aussi celle du moment d'une force par rapport à un point 0. Maintenant signalons que le moment d'une force $\vec{F}$, dans le point application est le point A, par rapport au point 0 est égal à (voir figure 17).

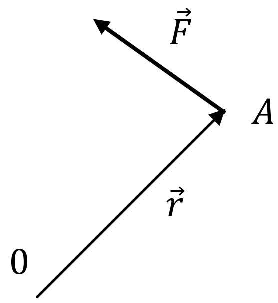


fig. 17

$$\vec{M}_0\,(\vec{F}) = 0\vec{A} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Le moment d'une force $\vec{F}$par rapport à une point donné posséde tous les propriétés des produits vectoriels et ses caractéristiques.

c- Multiplication de trois vecteurs

Jusqu'à ici, nous avons étudié la multiplication de deux vecteurs seulement. Pour trois vecteurs nous aurons trois sortes de multiplication.

i) Le produit mixte

Le produit mixte et par définition le produit scalaire d'un vecteur $\vec{a}_3$ par Un produit vectoriel $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$.Cette grandeur est un scalaire que nous notons comme

$$W = (\vec{a}_1 \text{x } \vec{a}_2).\ \vec{a}_3 = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\,]$$

Le signe de produit mix et positif au négatif selon que le triétre ($\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$)est de même sens ou non, que le triétre de référence ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$)Remarquons que la grandeur WReprésente le volume du parallèlépipéde construit sur les trois vecteurs $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ (voir fig. 18) ;

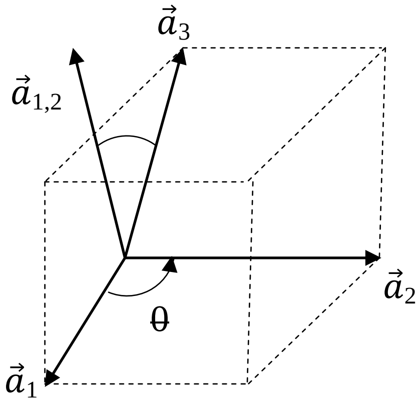


fig. 18

En effet

$$\vec{a}_{1,2} = \vec{a}_1 \text{ x } \vec{a}_2$$

Est le vecteur orienté représentant la surface du parallèlo gramme construit sur $\vec{a}_1$ et$\vec{a}_2$etα(*)est l'angle de $\vec{a}_{1,2}$ Avec $\vec{a}_3$, $\vec{a}_{1,2}$ cosα représente la projection de la surface de ce parallèle gramme sur le plan perpendiculaire à $\vec{a}_3$;le volume de parallèlépipéde est donnée par

$$W = \vec{a}_{1,2}\vec{a}_3 \cos\alpha = (\vec{a}_1 \text{ x } \vec{a}_2).\ \vec{a}_3$$

Il est facile de montrer que nous pouvons écrire, per mutation circulaire sur les vecteurs.

$$W = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\,] = (\vec{a}_1 \text{ x } \vec{a}_2).\ \vec{a}_3 = (\vec{a}_2 \text{ x } \vec{a}_3).\ \vec{a}_1 = (\vec{a}_3 \text{ x } \vec{a}_1).\ \vec{a}_2$$

(*) Par définition

$\vec{a}_{1,2} = \vec{a}_1.\vec{a}_2 \sin\theta$(voir fig. 19)

CH = OC sin $\theta = a_2 \sin\theta$

La surface du triangle O B C est de

$\frac{1}{2}$ CH.OB = $\frac{1}{2} a_2\, a_1 \sin\theta$

C'est pourquoi la surface de parallèle gramme construit sur$\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ est égal à

$2.\ \frac{1}{2} a_1\, a_2 \sin\theta = a_1\, a_2 \sin\theta$

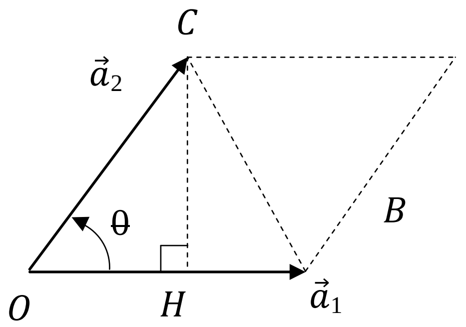


fig. 19

ii) Produit d'un vecteur par le produit scalaire de deux vecteurs.

Le résultat de l'opération "produit d'un vecteur par le produit scalaire de deux autre vecteur" et une grandeur vectoriel, par exemple

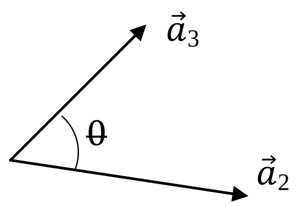


fig. 20

$$\vec{a}_1 (\vec{a}_2.\vec{a}_3) = \vec{a}_2\vec{a}_3 \cos \theta. \vec{a}_1$$

(voir fig. 20) C'est un vecteur dans le support est celui de $\vec{a}_1$ et de même direction que $\vec{a}_1$ si $\vec{a}_2\, \vec{a}_3 \cos \theta$est positif ($\theta$est l'ongle que font entre eux $\vec{a}_2$ et $\vec{a}_3$)

Par conséquent, la position de la parenthèse dans un tel produit et très important, il est facile de vérifier que

$$\vec{a}_1 (\vec{a}_2.\vec{a}_3) \neq \overrightarrow{(a_1}. \vec{a}_2)\vec{a}_3$$

et que l'expression $\vec{a}_1.\vec{a}_2.\vec{a}_3$ n'a aucun signification.

iii) Le double produit vectoriel.

Le produit ($\vec{a}_1$ x$\vec{a}_2$) x $\vec{a}_3$ est appelé « double produit victoriel » de trois vecteurs $\vec{a}_1.\vec{a}_2$ et $\vec{a}_3$.Le résultat de cette opération est un vecteur. La position des parenthèses est trés important aussi. En effet il est facile de voir que.

$$(\vec{a}_1 \,\mathrm{x} \vec{a}_2) \,\mathrm{x}\, \vec{a}_3 \neq \vec{a}_1 \,\mathrm{x}\, (\vec{a}_2 \,\mathrm{x} \vec{a}_3)$$

La formule fondamentale de double produit vectoriel est

$$\vec{a}_1 \,\mathrm{x}\, (\vec{b} \,\mathrm{x}\, \vec{c}) = (\vec{a}.\, \vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\, \vec{b})\, \vec{c}$$

d- Quelques opérations sur les vecteurs -opérateur vectoriel-

i) Dérivée d'une fonction vectorielle par rapport à une variable scalaire.

Nous avons connu la notion de fonction scalaire de la variable x

$$Y = \mathrm{f(x)}$$

C'est une fonction qui exprime une grandeur scalaire. Maintenant nous faisons connaissance avec la notion de fonction vectorielle. Pour cela considérant, par exemple, un système de n particules (voir fig. 21) de masses m_1, m_2, … m_n et supposans pour fixer les idées (mais

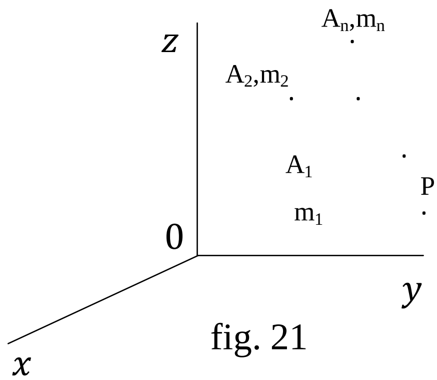


fig. 21

Cette condition n'est pas nécessaire pour ce qui suit), que ces n particules soient fixes par rapport à un système de référence données. En chaque point P de l'espace, nous pouvons définir un vecteur $\vec{V}_p$L'origine P tel que,

$$\vec{V}_p = m_1\overrightarrow{PA}_1 + m_2\overrightarrow{PA}_2 + \ldots\ldots + m_n\overrightarrow{PA}_n$$

Il est clair que $\vec{V}$p est un fonction vectorielle de la position de point P, parce que la grandeur $\vec{V}$p est toujours un vecteur quand le point P se déplacer dans l'espace.

Nous supposons connue la notion de dérivée l'une fonction scalaire de la variable x, y= f(x).

C'est la limite (si elle existe) :

$$y'(x) = \lim \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Considérons une fonction vectorielle, telle que $\vec{V}$p Définie au-dessus, de la position du point P et par conséquent de ses trois coordonnées x,y,z et supposons que ces trois coordonnées soient toutes les 3 fonction d'une même variable scalaire u(le temps par exemple) c'est pourquoi on peut écrire

$$\vec{V}_p\,(P) = \vec{V}_p(x,y,z) = \vec{V}_p(u)$$

Dans ces conditions, nous appellerons "dérivée de la fonction vectorielle $\vec{V}_p(u)$" la limite (si elle existe) de quotient $\frac{\Delta\,\vec{V}\,(u)}{\Delta u}$ Lorsque l'accroissement correspondant de la fonction $\Delta\vec{V} = \vec{V}\,(u + \Delta u) - \vec{V}\,(u)$, tend alors également vers zéro; cette derrière est une quantité vectorielle que nous noterons.

$$\vec{V}'(u) = \frac{d\vec{V}\,(u)}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\vec{V}(u+\Delta u) - \vec{V}(u)}{\Delta u}$$

ii) Propriétés des dérivées de fonction vectorielle

1- Si $\vec{V}\,(u) = \overrightarrow{constante}$ $\quad \frac{d\vec{V}\,(u)}{du} = \vec{0}$

2- Si $\vec{V}\,(u) = \vec{V}_1(u) + \vec{V}_2$ $\quad \frac{d\vec{V}\,(u)}{du} = \frac{d\vec{V}1\,(u)}{du} + \frac{d\vec{V}2\,(u)}{du}$

3- Si $\vec{W}\,(u) = \vec{y}(u)\,\vec{V}\,(u)$

Ou $\vec{y}(u)$ – Une fonction scalaire $\quad \frac{d\vec{W}\,(u)}{du} = \frac{d\vec{y}}{du}\vec{V}(u) + \vec{y}(u)\,\frac{d\vec{V}\,(u)}{du}$

Si $\vec{V}(u) = X(u)\vec{\imath} + Y(u)\vec{\jmath} + Z(u)\vec{k}$

Alors $$\frac{d\vec{V}\,(u)}{du} = \frac{dX\,(u)}{du}\vec{\imath} + \frac{dY\,(u)}{du}\vec{\jmath} + \frac{dZ\,(u)}{du}\vec{k}$$

4- La dérivée d'un produit scalaire $\vec{V}_1$(u). $\vec{V}_2$(u) est égale a

$$\frac{d(\vec{V}1(\mathrm{u}).d\vec{V}2(\mathrm{u}))}{du} = \frac{d\vec{V}1\,(u)}{du}.\,\vec{V}_2(\mathrm{u}) + \vec{V}_1(\mathrm{u})\,\frac{d\vec{V}2}{du}$$

5- La dérivée d'un produit vectoriel $\vec{W}$(u) = $\vec{U}$(u) x $\vec{V}$(u) est égale a

$$\frac{d\vec{W}\,(u)}{du} = \frac{d\vec{U}\,(u)}{du} \times \vec{V}(\mathrm{u}) + \vec{U}(\mathrm{u}) \times \frac{d\vec{V}\,(u)}{du}$$

Dans ce cas, attention a l'order des vecteurs dans les produits vectoriels.

6- Le vecteur dérivée $\frac{d\vec{V}\,(u)}{du}$ est porté par la tangente en M a la courle (C) décrite par l'extrémité du vecteur $\vec{V}$(u) quand u varie. (Voir fig. 22)

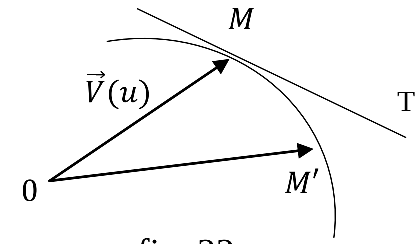


fig. 22

Si la courle (C) est situé sur la surface d'une sphère de rayon R constant, alors on peut poser /$\vec{V}$(u)/ = R ou $\vec{V}$(u).$\vec{V}$(u) = R² ;

Si nous dérivons cette derriére expression, nous obtenon

$$2\,\vec{V}(\mathrm{u})\,\frac{d\vec{V}\,(u)}{du} = 0$$

Par conséquente, la dérivée d'un vecteur de module constant (mais de direction variable) est perpendiculaire à ce Vecteur.

iii) Opérateurs vectoriels en coordonnées cartésiennes

Nous avons déjà su que toutes des grandeurs physiques pouvaient être représentées mathématiquement soit par des fonctions scalaires soit par des fonctions Vectorielles. Les principales variables, utilisées en physique, sont: Les coordonnées cartésiennes x,y,z d'un point au voisinage duquel une propriété donné du système physique est étudiée et temps t pour etudier l'évolution de cette propriété au cours du temps.

On écrira ce fonction scalaire en physique respectivement.

f(x, y, z, t) et $\vec{A}$ (x, y, z, t)

1- Opérateur grandient.

Par définition, le gradient de la fonction scalaire f(x,y,z,t) est le vecteur $\vec{F}$ (x, y, z, t) dans les composants en coordonnées cartésiennes, sont

$$F_x = \frac{\partial f\left(x,y,Z,t\right)}{\partial x}$$

$$F_y = \frac{\partial f\left(x,y,Z,t\right)}{\partial y},\ F_z = \frac{\partial f\left(x,y,Z,t\right)}{\partial z}$$ Alors on peut écrire

$$\vec{F}(x,y,Z,t) = \frac{\partial f(x,y,Zt)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f(x,f,Z,t)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f(x,y,Z,t)}{\partial Z}\vec{k}$$

Nous pouvons aussi dire que le vecteur $\vec{F}$ est le résultat de l'opération: "opérateur nabla (noté $\vec{\nabla}$)agissant sur la fonction scalaire $f(x,y,z,t)$ »

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}.\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}.\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}.\vec{k}$$

En effet

$$\vec{\nabla} f(x,y,z,t) = \left[\frac{\partial}{\partial x}.\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}.\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}.\vec{k}\right] f(x,y,z,t)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = \vec{F} = \overrightarrow{grandient} f(x,y,z,t)$$

Cette opération gradient (ou " nabla" ou " del") est alors un opérateur Vectoriel que nous pouvons écrire

$$\vec{\nabla} = \overrightarrow{grad} = \frac{\partial}{\partial x}.\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}.\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}.\vec{k}$$

2. Opération divergence

La divergence d'un vecteur $\vec{B}$ est, par définition, la quantité scalaire

$$div\vec{B} = \frac{\partial B_x\left(x,y,z,t\right)}{\partial x} + \frac{\partial B_y\left(x,y,z,t\right)}{\partial y} + \frac{\partial B_z\left(x,y,z,t\right)}{\partial z}$$

Cette opération peut-être considéré comme le produit scalaire de l'opération vectoriel "nabla" $\vec{\nabla}$ par le vecteur $\vec{B}$

En effet

$$\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{B}=\left(\frac{\partial}{\partial x}.\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}.\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}.\vec{k}\right)\left(B_x.\vec{i}+B_y.\vec{j}+B_z.\vec{k}\right)$$

$$=\frac{\partial B_z(x,y,z,t)}{\partial x}+\frac{\partial B_y(x,y,z,t)}{\partial y}+\frac{\partial B_z(x,y,z,t)}{\partial z}=div\overrightarrow{B}$$

3. Opérateur Laplacien

Le Laplacien d'une fonction scalaire $g(x,y,z,t)$ est une quantité scalaire définition par

$$\text{Laplacien } g(x,y,z,t)=\frac{\partial^2 g(x,y,z,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g(x,y,z,t)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 g(x,y,z,t)}{\partial z^2}=\nabla^2 g$$

(Parfois on note Laplacien ∇^2 comme Δ - delta majuscule).

C'est un operateur scalaire agissant sur une fonction scalaire

$$\nabla^2 f=\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{\nabla}f=\left[\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right].\left[\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right]f(x,y,z,t)$$

$$=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f(x,y,z,t)$$

$$\nabla^2=\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

4. Opérateur rotationnel.

On appelle rotationnel d'un vecteur $\overrightarrow{A}$ quelconque Le vecteur défini par la relation

$$\text{rot } \overrightarrow{A}(x,y,z,t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}=$$

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

4. CHAMPS DE VECTEURS

a) Définition

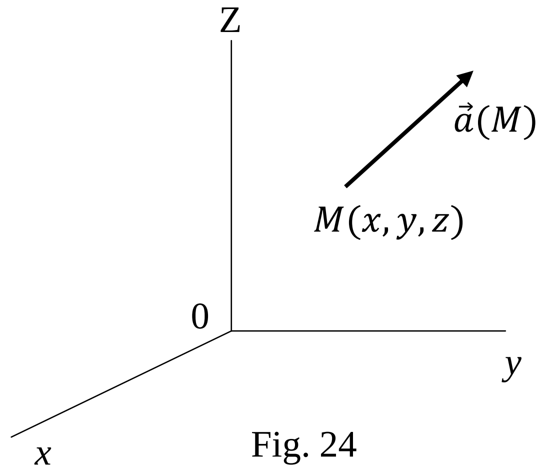


Fig. 24

Soit un espace euclidien quelconque, dans lequel on a choisi une base orthnormée $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Si l'on peut associer à chaque point M de ce espace ayant Les coordonnées x, y, z , un vecteur $\vec{a}$(M) dépendant de la position du point M, (voir fig. 24), nous disons que nous avons un champ de vecteurs dans cet espace.

On peut exprimer les composantes du vecteur $\vec{a}$(M) comme suit

$$\vec{a}(M) = \vec{a}\ (x, y, z,) = a_x(x, y, z,)\ \vec{i} + a_y(x, y, z,)\ \vec{j} + a_z(x, y, z,)\ \vec{k}$$

b) Exemple

En physique il y a beaucoup de champs de vecteur, champs de vitesse, champ de forces, champ d'accélération (en particulier, champs de pesanteur), champ électrique, champ magnétique, d'un aimant permanent ect. Considérons par exemple, l'écoulement d'un fluide ,en chaque point de l'espace ou s'écoule le liquide existe une certaine vitesse d'écoulement qui est représentés par un vecteur, et le phénomène peut-être représenté par un champ de vecteur vitesse . Voyez l'écoulement de l'eau dans une rivière c'est une image de champs de vitesses.