Chapitre 3 : Statique

3.0 INTRODUCTION

La mécanique rationnelle ou théorique, est une science qui étudie le mouvement de la matière sous sa forme la plus simple. C'est une science qui traite des lois générales régissant le mouvement mécanique et l'état d'équilibre des corps ou des parties de corps matériels.

. Par mouvement mécanique, on entend le changement de position relative des corps matériels qui se produit dans le cours du temps.

Puisque l'état d'équilibre (statique, fixe, stable) n'est qu'un cas particulier du mouvement, la mécanique rationnelle se donne aussi comme objet l'étude de l'équilibre des corps matériels.

3.1 AXIOMES DE LA STATIQUE

La méthode des abstractions et la généralisation de l'expérience accumulée pendant des siècles d'observation immédiate et d'activité pratique des hommes ont permis de dégager certains lois générales de la statique. Ces lois s'appellent axiomes. Tous les développements ultérieurs de la statique élémentaire se déduisent des axiomes par raisonnement mathématique.

Axiome 1 : Pour que deux forces appliquées à un solide parfait se trouvent en équilibre, il faut et il suffit qu'elles soient de module égal, de sens contraire et soient portées par la droite joignant leurs points d'application (Figure 3.1).

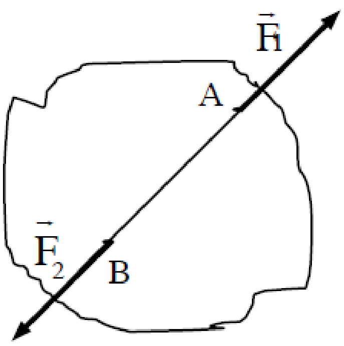

Figure 3.1

Axiome 2 : Au système de forces appliqué à un solide parfait, on peut ajouter ou retrancher n'importe quel système ou sous système de forces équilibré sans que l'effet du premier système s'en trouve modifie.

Axiome 3 :(Principe de l'action et de la réaction

Les forces exercées par deux solides l'un sur l'autre sont toujours de même module, de même direction et de sens opposé (Principe de l'action et de la réaction).

Axiome 4 : Si un système de force donné est équilibré sur un solide, il reste équilibré aussi sur tout autre solide. (Les dimensions et la forme du solide ne jouent aucun rôle dans la statique du solide parfait).

Axiome 5 : Principe de solidification

Si un corps déformable se trouve en équilibre, il le reste aussi après la solidification c'est ce qu'on appelle le Principe de solidification.

Axiome 6 : Règle du parallélogramme

La résultante de deux forces appliquées à un même point du solide a son point d'application en ce même point ; son module et sa direction sont déterminés par la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces.

3.2 LIAISONS, APPUIS ET REACTIONS

3.2.1 Définition

Les solides considérés en mécanique peuvent être libres ou liés, suivant le cas. Un solide est dit libre s'il peut se déplacer en toute direction, par exemple une pierre lancée dans l'espace est un solide libre. Un solide est dit lié s'il ne peut se déplacer que dans des directions déterminées ou s'il est assujetti à rester immobile.

Les corps matériels qui s'opposent au mouvement du solide sont appelés liaisons et les forces qu'ils exercent sur le solide, sont des réactions de liaisons.

3.2.2 Différents types des liaisons et de réactions

Les liaisons peuvent être matérialisées soit par des appuis, articulations, encastrements, …etc. elles sont confectionnées à partir d'un matériau absolument rigide, et le frottement, aux points de contact avec les solides considérés, est considéré négligeable.

a) Liaison libre

Cette liaison est en fait une absence de liaison, le solide est « livré à lui même » (cas d'un satellite dans l'espace, ou d'un projectile). Il existe six degrés de liberté et aucun effort de contact transmis (pas de réaction).

b) Liaison ponctuelle (appui plan ou appui simple)

Pour un solide qui repose simplement sur une surface polie (horizontale, verticale ou inclinée) Figure 3.2 (a, b) ou sur le rouleau cylindrique Figure 3.2c, la réaction de la surface est appliquée au solide au même point de contact et dirigée suivant la normale à la surface d'appui. Elle s'appelle réaction normale et se note $\vec{R}$.

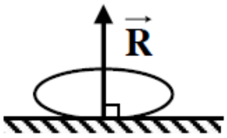

Figure 3.2.a

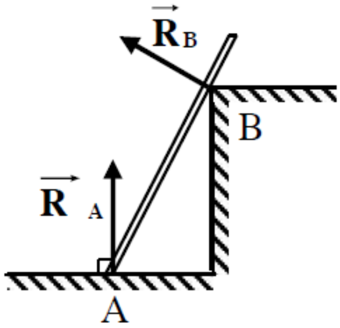

Figure 3.2.b

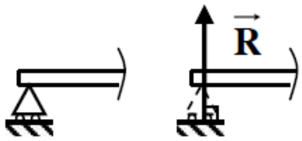

Figure 3.2.c

c) Solides articulés (Appuis doubles)

Dans la pratique, on trouve parfois le corps solide articulé soit par :

- un appui articulé (Figure 3.3a),
- une articulation cylindrique (liaison pivot glissant, liaison linéaire annulaire) (Figure 3.3b),
- ou une articulation sphérique (liaison rotule) (Figure 3.3c)

Le module et la direction de la réaction $\vec{R}$ dans son plan sont inconnus

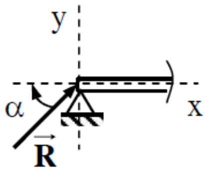

Figure 3.3a

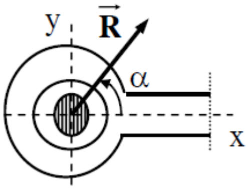

Figure 3.3b

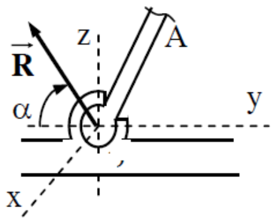

Figure 3.3c

d) Barres rigides

Les barres de poids négligeables peuvent servir comme des liaisons. Leur réaction sera dirigée suivant la longueur de celle-ci (Figure 3.4).

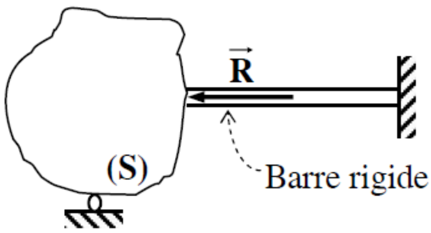

Figure 3.4

*

e) Liaison flexible (fil, corde, chaîne) (Figure 3.5)

La réaction $\vec{T}$ porte le nom de tension. Elle est appliquée au point d'attache du lien flexible au solide, dirigée le long de la liaison flexible (du fil, de la corde, de la chaîne, etc…..).

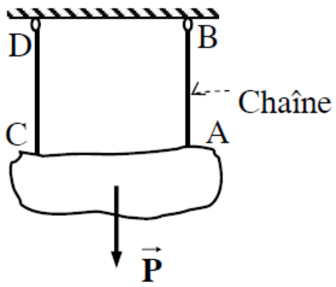

Figure 3.5.a

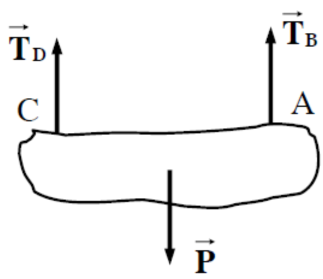

Figure 3.5.b

f) Liaison Encastrement (Figure 3.6)

La liaison encastrement ne permet aucun mouvement relatif entre les deux solides. Leurs réactions sont représentées par un moment qui empêche la rotation du solide, et des réactions horizontale et verticale, qui empêchent les déplacements horizontaux et verticaux.

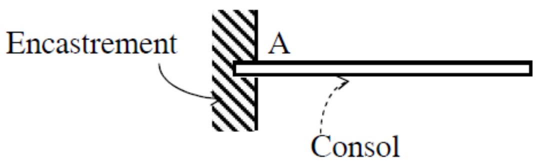

Figure 3.6.a

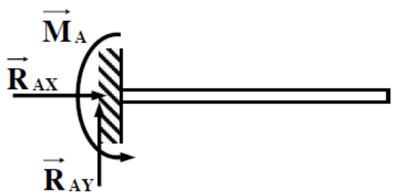

Figure 3.6.b

3.3 AXIOME DES LIAISONS

Pour tout corps solide lié (Figure 3.6a), il est possible de supprimer les liaisons en les remplaçant par les réactions et, de lui considérer comme un corps solide libre (Figure 3.6b) soumis à l'action des forces données et des réactions de liaisons.

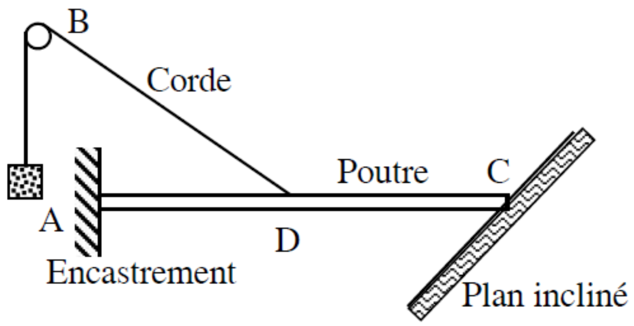

Figure 3.6.a. Corps solide lié

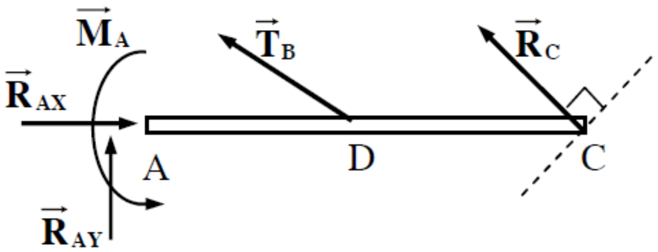

Figure 3.6.b. Corps solide libre

3.4. MOMENT D'UNE FORCE PAR RAPPORT A UN POINT

Soit une force $\vec{F}$ et un point O (Figure 3.7). Menons par O un plan contenant $\vec{F}$. Abaissons de O une perpendiculaire OP sur la direction AB de la force $\vec{F}$. La longueur de la perpendiculaire est le bras de levier h de la force $\vec{F}$ par rapport au point O ; ce point s'appelle pôle.

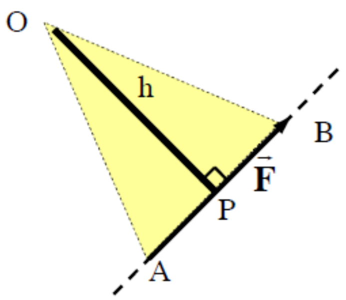

Figure 3.7.a

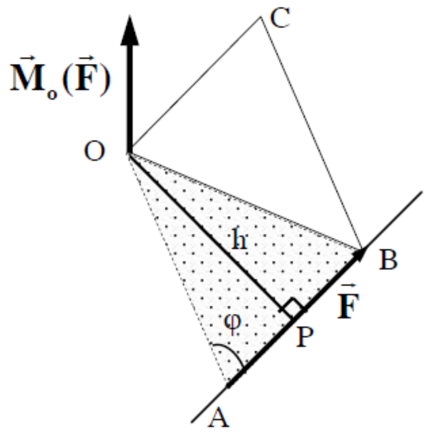

Figure 3.7.b

Figure 3.7 Moment d'une force par rapport à un point

Le moment de $\vec{F}$ par rapport à O est le produit du module F du vecteur de la force $\vec{F}$ par le bras de levier h, qui peut être affecté de signe positif ou négatif.

$$M_o\left(\vec{F}\right)=\pm Fh \qquad (3.1)$$

$M_o\left(\vec{F}\right)\rangle 0$ Si la force fait tourner le plan dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre.

$M_o\left(\vec{F}\right)\langle 0$ Si la force fait tourner le plan dans le sens des aiguilles d'une montre.

La valeur absolue du moment d'une force est le double de l'aire du triangle OAB construit sur la force $\vec{F}$ et le pôle O ou l'aire du parallélogramme OABC (Figure 3.7b).

$$\left|M_o\left(\vec{F}\right)\right|=Fh=2S_{OAB}$$

Ou

$$\left|M_o\left(\vec{F}\right)\right|=Fh=FOA\sin\varphi=\left\|\vec{r}\wedge\vec{F}\right\|$$

D'où

$$\left|M_o\left(\vec{F}\right)\right|=\left\|\vec{r}\wedge\vec{F}\right\| \qquad (3.2)$$

Le vecteur moment $\vec{M}_o\left(\vec{F}\right)$ est égal en module à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{r}$ où $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{F}$. Il est perpendiculaire au plan de ces deux vecteurs.

Ainsi, le vecteur moment d'une force $M_o\left(\vec{F}\right)$ par rapport à un point O est un vecteur lié en O, qui s'écrit :

$$\vec{M}_o\left(\vec{F}\right)=\vec{r}\wedge\vec{F} \qquad (3.3)$$

3.5. TORSEURS DES FORCES EXTERIEURES

Les efforts appliqués sur un système matériel peuvent être représentés mathématiquement par un torseur, appelé torseur d'action, qui s'écrit en un point O :

$$\left[F\right]_o=\begin{pmatrix}\vec{F}\\ \vec{M}_o\end{pmatrix} \qquad (3.4)$$

Où

$\vec{F}$ Représente la résultante des forces extérieures appliquées $\vec{R}$;

$\vec{M}_o$ Le moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point O.

Les efforts extérieurs à un système matériel (S) sont les efforts exercés sur (S) par d'autres systèmes extérieurs (Figure 3.7a). Si (S) est soumis à des forces F_i et des couples M_i (Figure 3.7a), le torseur des efforts extérieurs exercés sur (S) en un point O (Figure 3.7b), s'écrit :

$$[F_c]_o = \begin{pmatrix} \vec{F}_c \\ \vec{M}_o(F_c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{R} = \sum \vec{F}_i \\ \sum \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{F}_i \end{pmatrix} \qquad (3.5)$$

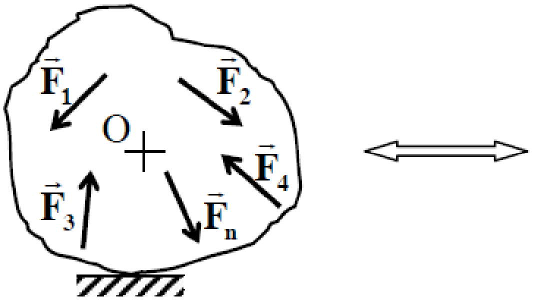

Figure 3.7.a

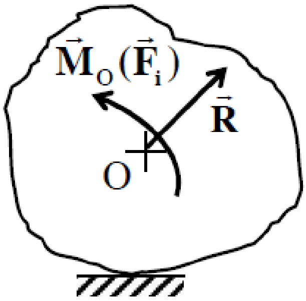

Figure 3.7.a

3.6 CONDITION D'EQUILIBRE STATIQUE

3.6.1 Cas Général

Un solide (S) est en équilibre par rapport à un repère fixe (R) si chaque point de (S) reste fixe dans le temps par rapport à (R). En conséquence, le torseur des forces extérieurs en tout point O est nul où :

$$[F_c]_o = [0]_o \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \vec{R} = \vec{F}_c \\ \vec{M}_o(F_c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \qquad (3.6)$$

Pour que le système de forces appliquées à un solide soit en équilibre, il faut et il suffit que la résultante générale du système et le moment résultant par rapport à un centre de réduction quelconque soient égaux à zéro, où :

$$\vec{R} = \vec{0}, \vec{M}_o(\vec{F}_i) = \vec{0} \qquad (3.7)$$

3.6.2 Condition d'équilibre analytique

3.6.2.1 Forces quelconques

La condition d'équilibre analytique d'un corps solide est que la projection des éléments du torseur des forces extérieures soit nulle. Cette projection sur les axes d'un repère orthonormé R(O, xyz) permet d'obtenir en général six équations :

– Trois équations liées à la résultante des forces extérieures :

$$\vec{R}=\vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_x = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0} \\ \vec{R}_y = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0} \\ \vec{R}_z = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iz} = \vec{0} \end{cases}$$

Et, trois équations liées au moment des forces par rapport aux axes du repère :

$$\vec{M}_O = \left(\vec{F}_i\right)\vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{M}_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{ix}\left(\vec{F}_i\right) = \vec{0} \\ \vec{M}_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{iy}\left(\vec{F}_i\right) = \vec{0} \\ \vec{M}_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{iz}\left(\vec{F}_i\right) = \vec{0} \end{cases}$$

3.6.2.2 Forces concourantes

Dans le cas d'un système de forces concourantes au centre O, le moment sera nul par rapport à O, il reste seulement trois équations pour la projection de la résultante:

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_x = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0} \\ \vec{R}_y = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0} \\ \vec{R}_z = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iz} = \vec{0} \end{cases}$$

3.6.2.3 Forces planes

Dans le cas d'un problème plan (par exemple X et Y), on aura trois équations d'équilibre.

-Deux équations liées à la résultante statique :

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_x = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0} \\ \vec{R}_y = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0} \end{cases}$$

Et une équation pour le moment des forces par rapport au centre O :

$$\vec{M}_o\left(\vec{F}_i\right) = \vec{0}$$

3.6.2.4 Forces parallèles

Dans le cas d'un système de forces parallèles, où un couple, une équation pour le moment des forces par rapport au centre O :

$$\vec{M}_o\left(\vec{F}_i\right) = \vec{0}$$

3.6.3 Condition d'équilibre géométrique

Pour que le système de forces concourantes soit en équilibre, il faut et il suffit que le polygone des forces soit fermé.