Chapitre 4

Cinématique du solide rigide

Introduction :

Un solide parfait, est un ensemble d'éléments matériels, dont les distances mutuelles ne varient pas au cours du temps.

La cinématique du solide traite la distribution des vitesses des points dans un corps sans tenir compte des causes qui ont provoquées le mouvement.

4.1 Rappels succinct sur les quantités cinématiques pour un point matériel

a- Trajectoire :

Soit un point M repéré dans un référentiel R fixe dont la position est déterminée par le vecteur position $\vec{r}$ à l'instant t et Où x(t), y(t) et z(t) sont les coordonnées du point M à l'instant t.

M(t) est la position du point M à l'instant t

M'(t+ Δt) est la position du point M à l'instant (t+Δt)

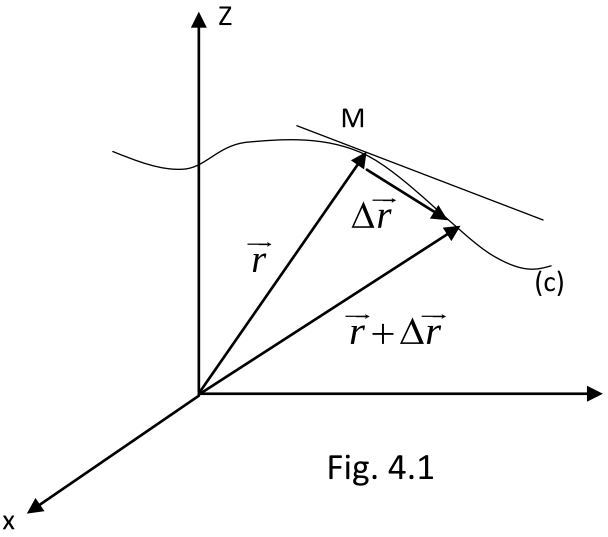


Fig. 4.1

Le mouvement peut-être caractérisé par le vecteur

$$\overrightarrow{OM} = OM_x\vec{i} + OM_y\vec{j} + OM_z\vec{k}$$

OM_x, OM_y, OM_z étant les projections de vecteurs OM sur les axes coordonnées sans les coordonnées du point M dans le système de coordonnées Oxyz, elles sont fonctions de temps puisqu'il y a le mouvement (voir figure 4.1) et l'on appelle $\overrightarrow{OM}$ Le vecteur de position

$$\overrightarrow{OM}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

$x(t), y(t), z(t)$ Définissent des équations paramétriques du mouvement de M.

Le lieu de position des points M au cours de temps dans l'espace est-ce que l'on appelle trajectoire. C'est une courbe fixe indépendant de temps, sur laquelle se déplace le point matériel M. Pour déterminer l'équation trajectoire on cherchera une relation contre les coordonnées $x(t), y(t), z(t)$ du point M. Ne faisant pas intervenir le temps.

Parce que la trajectoire d'une pointe M en mouvement est fixe, on peut également définir l'abscisse curviligne $S(t)$ qui représenter la distance algébrique contée sur la trajectoire, entre un point fixe A de la trajectoire prise pour origine, et le point courant M (regarder la figure 26).

b) Vitesse

Supposons qu'un point matériel se déplacer le long d'une trajectoire ou courbe (c) (figure 4.2) soit $\vec{r}=\vec{r}(t)$ le vecteur position de point P où temps t et soit $\vec{r}+\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)$ le vecteur position

du point Q au temps $t+\Delta t$ La vitesse en P (c'est ma princesse aussi appelle

vitesse t est alors donné par

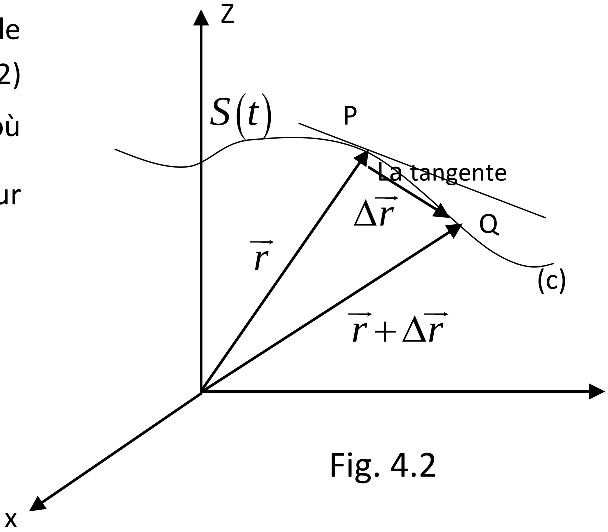


Fig. 4.2

$$\vec{V}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}=\lim_{x\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{r(t+\Delta t)}-\overrightarrow{r(t)}}{\Delta t}$$

C'est un vecteur tangent $\vec{a}=(P)$ en P. Si le vecteur position de mouvement peut s'écrire comme :

$$\vec{r}=\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

On peut écrire :

$$\vec{V}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx(t)}{dt}\vec{i}+\frac{dy(t)}{dt}\vec{j}+\frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$$

Le module de la vitesse est donnée par :

$$V(t)=\left|\vec{V}(t)\right|=\sqrt{\vec{V}.\vec{V}}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}=\frac{ds(t)}{dt}$$

Où $S(t)$ est l'arc de courbe (c) mesuré de la position initial ou point P (l'abscisse curviligne)

c) L'accélération

Par définition $\vec{V}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ est la vitesse de point matériel. En général elle est la fonction de t aussi. On définit l'accélération de point matériel (encore appelle l'accélération instantanée) par :

$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{V(t+\Delta t)-\vec{V}(t)}{\Delta t}=\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

En fonction de $\vec{r}=(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$, accélération est :

$$\vec{a}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

et son module est :

$$a=\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

d) Vitesse et accélération relatives

Si deux points matériaux P_1 et P_2 se déplacent

Avec des vitesses $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ des accélérations $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$, Les vecteurs suivants:

$$\vec{V}_{P_2/P_1}=\vec{V}_2-\vec{V}_1 \text{ et } \vec{a}_{P_2/P_1}=\vec{a}_2-\vec{a}_1$$

Son appelles respectivement vitesse relative et accélération relative de P_2 Par rapport à P_1.

3) ÉTUDE DE QUELQUES MOUVEMENTS PARTICULIERS

Les définitions données ci-dessus de la position, trajectoire, de la vitesse et de l'accélération d'une point matériel M permettent de voir que l'on peut passer de l'unà l'autre pour un suite d'intégration $(a_x\to V_x\to x)$ ou de dérivation $(x\to V_x\to a_x)$ C'est là le but du problèmes the Cinematique. Pour simplicité nous limitons ici aux mouvements dans le plan. C'est-à-dire nous considérant ici le mouvement dons un espace a deux dimension et ci-dessus non étudieront quelques de mouvement simple.

a) Mouvement rectiligne uniforme.

Mouvement rectiligne uniforme est un mouvement qui se passe sur une ligne droite et à une vitesse constante. Non notons cette vitesse $\vec{V}_0$ et prenons un axe $\overrightarrow{Ox}$ de même direction que $\vec{V}_0$, alors vecteur de position $\overrightarrow{OM}$ et vecteur

vitesse $\vec{V}_0$ sont colinéaires. La valeur algébrique de la vitesseest $\vec{V}_0$, d'où

$$x = \int V_0 dt = V_0 t + x_0$$

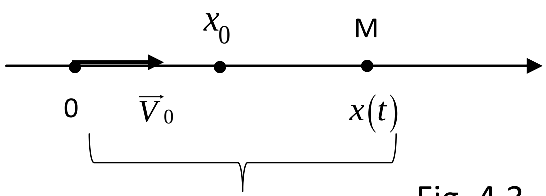


Fig. 4.3

x_0 est une constante d'intégration $x = x_0$ quand $t = 0$ (voir les figures 4.3 et 4.4)

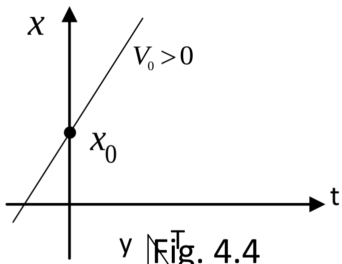


Fig. 4.4

b) Mouvement circulaire.

Supposons que le point matériel P se déplace sur un cercle C de rayon R. si s est la longueur de l'arc AP et θ l'angle au centre correspondant (voir la figure 4.5, alors $s = R\theta$ (retenez bien que l'ongle θ est mesuré par radian). Les modules de la vitesse tangentielle et de l'accélération sont donc donnés respectivement par :

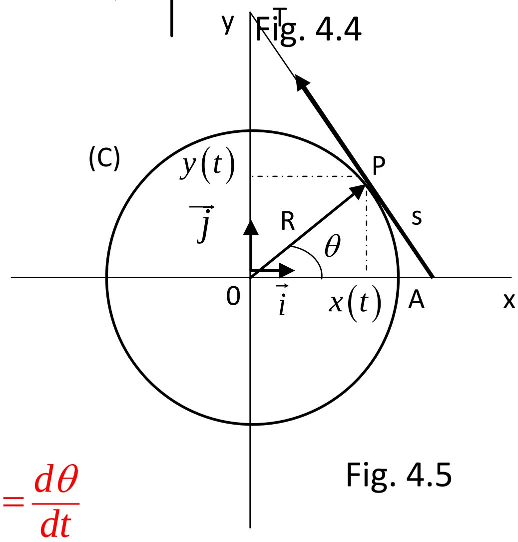


Fig. 4.5

$$V = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta(t)}{dt} = R\omega \text{ ou } \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

on a alors $$\omega = \frac{V}{R}$$

et $a = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{d^2 s}{dt^2} = R\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = R\alpha$ ou $\alpha = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

On appelle $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ et $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ respectivement la vitesse angulaire et l'accélération angulaire.

On peut considérer ce mouvement dans le système de coordonnées Oxy, la trajectoire étant circulaire, on a

$$\left[x(t)\right]^2 + \left[y(t)\right]^2 = R^2 \text{(Voir fig. 30)}$$

Si l'on appelle $\theta(t)$ l'angle entre $\overrightarrow{OP}$ et l'axe Ox Compté positivement dans le sens trigonométrique, on peut écrire :

$$x(t) = R\cos\theta(t)$$
$$y(t) = R\sin\theta(t)$$

Ce sont des équations paramétriques de mouvement circulaire.

Par définition, on obtient $\vec{r} = R\cos\theta(t)\vec{i} + R\sin\theta(t)\vec{j}$

$$\vec{V} = R\sin\theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\vec{i} + R\cos\theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\vec{j}$$

$$\vec{a} = -R\left(\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} + \cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\vec{i} + R\left(\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\vec{j}$$

Ou $$\vec{V} = -R\omega\sin\theta\vec{i} + R\omega\cos\theta\vec{j}$$

$$\vec{a} = R\left(\alpha\sin\theta + \omega^2\cos\theta\right)\vec{i} + R\left(\alpha\cos\theta - \omega\sin\theta\right)\vec{j}$$

$$\left|V^2\right| = V_x{}^2 + V_y{}^2 = R^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\omega^2 = R^2\omega^2$$

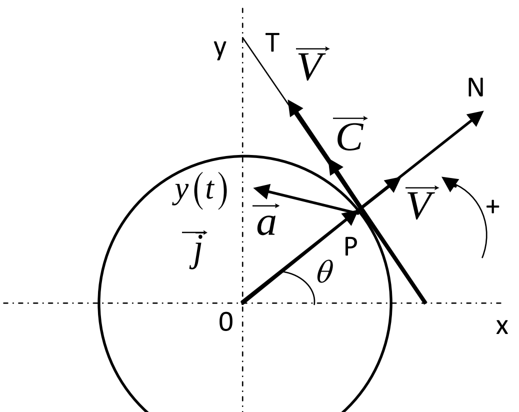
D'où $\left|\vec{V}\right| = R\omega$, $\omega -$ la vitesse angulaire

Il est facile de vérifier que $\overrightarrow{OP}.\vec{V} = 0$, C'est-à-dire que vecteur vitesse $\vec{V}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{aOP}\left(\overrightarrow{ar}\right)$ en effet

$$\overrightarrow{OP}.\vec{V} = \left(R\cos\theta\vec{i} + R\sin\theta\vec{j}\right).\left(-R\omega\sin\theta\vec{i} + R\omega\cos\theta\vec{j}\right)$$

$$= -R^2\sin\theta.\cos\theta\omega + R^2\sin\theta\cos\theta\omega = 0$$

Si maintenant définissons en Pun système d'axes orthonormés $\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{PT}$ Avec les vecteurs unitaires $\vec{V}$ et $\vec{C}$ respectivement : L'axe $\overrightarrow{PN}$ a le



même sens que le vecteur $\overrightarrow{OP}$ l'axe $\overrightarrow{PT}$ a le même sens que la tangente en P au cercle. Dans ces conditions (voir figure 31) on peut démontrer que l'accélération dans un mouvement circulaire peut-être s'écrie :

$$\vec{a}(t)-\frac{V^2(t)}{R}\vec{V}+\frac{dV(t)}{dt}\vec{i}$$

Pour cela on effectue les produit scalaire $\vec{V}.\vec{a}$ et $\overrightarrow{OP}.\vec{a}$ (nous nous rappelons que $\overrightarrow{OP}=x\vec{i}+y.\vec{j}$)

$\overrightarrow{OP}.\vec{a}$ =

$$\left(R\cos\theta\vec{i}+R\sin\theta\vec{j}\right).\left[-R\left(\alpha\sin\theta+\omega^2\cos\theta\right)\vec{i}+R\left(\alpha\cos\theta-\omega^2\sin\theta\right)\vec{j}\right]$$

$$=-R^2\cancel{\sin\theta}\cos\theta.\alpha-R^2\cos^2\theta\omega^2+R^2\cancel{\sin\theta}\cos\theta.\alpha-R^2\sin^2\theta.\omega^2$$

$$=-R^2\omega^2 \qquad \overrightarrow{OP}.\vec{a}=-R^2\omega^2$$

$$\vec{V}.\vec{a}=\left(-R\sin\theta.\omega\vec{i}+R\cos\theta.\omega\vec{j}\right).\left[-R\left(\alpha\sin\theta+\omega^2\cos\theta\right)\vec{i}+R\left(\alpha\cos\theta-\omega^2\sin\theta\right)\vec{j}\right]$$

$$=R^2\sin^2\theta.\omega.\alpha+\cancel{R^2\sin\theta\cos\theta.\omega^3}+R^2\cos^2\theta\omega.\alpha-\cancel{R^2\sin\theta\cos\theta.\omega^3}$$

$$=R^2\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)\omega.\alpha=R^2\omega.\alpha$$

$$\vec{V}.\vec{a}=R^2\omega\alpha$$

Mais $\overrightarrow{OP}=R\vec{v}$

$\vec{V}=R\omega\vec{\tau}$

D'où on a $\vec{a}.\vec{V}=-R\omega^2$

$\vec{a}.\vec{\tau}=R\alpha=R\frac{d\omega}{dt}$

$\vec{a}.\vec{V}$ estla projection de $\vec{a}$ sur l'axe $\vec{V}$ (sur la normale)

$\vec{a}.\vec{\tau}$ est la projection de $\vec{a}$ Sur l'axe $\vec{\tau}$ (sur la tangente)

Alors on peut écrire : $\vec{a}=-R\omega^2\vec{V}+R\frac{d\omega}{dt}\vec{\tau}$

Nous nous rappelons

$$V = R\omega \rightarrow \omega^2 = \frac{V^2}{R^2} \text{ et } \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt}$$

C'est pourquoi on obtient

$$\vec{a} = -\frac{V^2}{R}\vec{V} + \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$$

Retenez bien que $V(t)$ dans cette formule est le module de vitesse et $\frac{dv(t)}{dt}$ est la dérivé de modules de vitesse par rapport ou temps).

C'est-à-dire l'accélération dans un mouvement circulaire est la somme de deux composantes.

– La composante radiale centripète $\vec{a}_n = -\frac{V^2}{R}\vec{V}$
– La composante Tangentielle $\vec{a}_t = \frac{dV}{dt}\vec{\tau}$

Nous venons d'étudier un mouvement circulaire dans un plan. Si nous aurons un mouvement quelconque dans le plan, on peut démontrer que quelle que soit la trajectoire décrite par le point matériel, il est toujours possible de l'assimiler a une succession d'arcs de cercles élémentaires et de définir aussi un rayon de courbure ϑ en chaque point à l'autre - autrement dit ϑ est une fonction de la position de point matériel.

L'accélération alors se décompose en accélération tangentielle $\frac{dv(t)}{dt}$ et accélération centripète $\frac{V^2(t)}{\vartheta}$ dirigée vers le centre de courbure C au point M de la trajectoire (voir la figure 32)

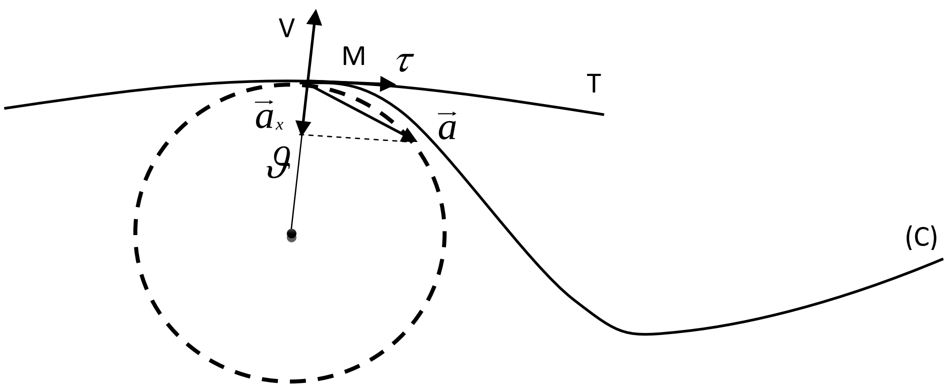


Fig. 4.7

Nous avons alors :

$$\overrightarrow{a_n} = -\frac{V^2(t)}{\rho}\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{a_t} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{\tau}$$

Ou ϑ est le rayon de courbure en point M.