TD N° 3 (STATIQUE)

Ex1:

Determiner le moment / à O de la force :
$\vec{F} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ avec le point d'application A, pour les cas suivant :
Le vecteur position du point A est donné par

1) $\vec{r_1} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$
2) $\vec{r_2} = 4\vec{i} + 6\vec{j} - 10\vec{k}$

En deduire l'angle que fait la force avec le vecteur position. $\vec{r}$.

1) $\vec{r_1} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ $(\vec{OA} = \vec{r_1})$

$$\vec{M_0}(\vec{F}) = \vec{r_1} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 18\vec{j} - 12\vec{k}$$

$$M_0(\vec{F}) = \sqrt{(3)^2 + (-18)^2 + 12^2} = 21{,}84 \text{ m.N}$$

Calcul de l'angle entre la force et le vecteur position $\vec{r_1}$.

$$\vec{F} \cdot \vec{r_1} = F . r_1 . \cos\theta_1 \Rightarrow \cos\theta_1 = \frac{\vec{F} . \vec{r_1}}{F . r_1}$$

$$F = \sqrt{4 + 9 + 25} = 6{,}16 \text{ N}$$

$$r_1 = \sqrt{4 + 9 + 16} = 5{,}38 \text{ m}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{\vec{F} . \vec{r_1}}{F . r_1} = \frac{-4 + 9 + 20}{6{,}16 + 5{,}38} = \frac{25}{33{,}19} = 0{,}75 \text{ donc}$$

$\theta_1 = 41°$

$$\vec{M_0}(\vec{F}) = -3\vec{i} - 18\vec{j} - 12\vec{k}$$

$$n = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4k.$$

$r_1 = 5,38$

$M_0 = 21,84$

$$\cos\theta = \frac{\vec{M_0} \cdot \vec{r_1}}{M_0 \cdot r_1}$$

$$\cos\theta = \frac{-6+54-48}{5,38 \cdot 21,84} = 0$$

$$\theta = 90^0$$

——o——

$\vec{M}'_0(\vec{F}) = \vec{r_2} \wedge \vec{F} =$

$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & k \\ 4 & 6 & -10 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2

$\vec{M}'_0(\vec{F}) = \vec{0}$

cela veut dire que $\vec{r_2}$ est $\parallel$ à $\vec{F}$.

Calcul de l'angle entre la force $\vec{F}$ et le vecteur position $\vec{r_2}$

$F = 6{,}16$ N $\qquad r_2 = \sqrt{16+36+100} = 12{,}33$ N

$\vec{F}.\vec{r_2} = F.r_2 \cos\theta_2 \Rightarrow \cos\theta_2 = \dfrac{\vec{F}.\vec{r_2}}{F.r_2} = \dfrac{-8-18-50}{6{,}16.12{,}33}$

$\cos\theta_2 = -1 \qquad \theta_2 = 180°$

$\Rightarrow \vec{r_2} \parallel \vec{F}$ et sens contraire.

---

2) Vecteur position $\vec{r_2} = 4\vec{i} + 6\vec{j} - 10\vec{k}$

$$\overrightarrow{M'_0}(\vec{F}) = \vec{r_2} \wedge \vec{F} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 6 & -10 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Donc $\vec{r_2}$ est $\parallel$ à $\vec{F}$

Calculons l'angle entre la force $\vec{F}$ et le vecteur position $\vec{r_2}$

$F = 6{,}16\ N \qquad r_2 = \sqrt{16 + 36 + 100} = 12{,}33\ N$

$\vec{F} \cdot \vec{r_2} = F \cdot r_2 \cdot \cos\theta_2 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \cos\theta_2 = \frac{\vec{F} \cdot \vec{r_2}}{F \cdot r_2} = \frac{-8 - 18 - 50}{6{,}16 \cdot 12{,}33}$$

$\cos\theta_2 = -1 \qquad \theta_2 = 180°$

$\Longrightarrow \vec{r_2} \parallel \vec{F}$ et de sens contraire.

Ex2 :

Dans un repère orthonormé Oxyz. soit
La force $\vec{F} = -\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$
et le point d'application de cette force
est : $A(2,3,5)$

1) Calculer le moment de $\vec{F}$ / O et / aux
axes x, y, z.

2) Calculer l'angle entre les vecteur $\vec{F}$ et $\vec{M_O}$

1) $A(2,3,5)$ $\qquad \vec{F} = -\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$

$$\vec{M_o}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= -35\vec{i} + 5\vec{j} + 11\vec{k}$$

$$M_o = \sqrt{(35)^2 + (5)^2 + (11)^2} =$$

$$F = \sqrt{(-1)^2 + (4)^2 + (-5)^2} =$$

Moment / aux axes :

$$M_{ox} = \vec{M_o} \cdot \vec{i} = -35\,mN$$

$$M_{oy} = \vec{M_o} \cdot \vec{j} = +5\,mN$$

$$M_{oz} = \vec{M_o} \cdot \vec{k} = 11\,mN.$$

2) Calcul de l'angle entre $\vec{F}$ et $\vec{M_o}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{F} \cdot \vec{M_o}}{F \cdot M_o} = \frac{35 + 20 - 55}{F \cdot M_o} = 0$$

$$\theta = 90°$$