

Chapitre 3

Lois de distribution usuelles appliquées en hydrologie

I. La loi normale de Gauss

I.1. Introduction

La distribution de probabilité continue la plus importante dans l'ensemble du domaine des statistiques est la distribution normale. Son graphique, appelé courbe normale, est la courbe en forme de cloche de la Figure 1 qui décrit la distribution de tant d'ensembles de données qui se produisent dans la nature, l'industrie et la recherche. Par exemple, les mesures physiques comme les observations météorologiques, les études sur les précipitations et les débits. En outre, les erreurs dans les mesures scientifiques sont extrêmement bien approchées par une distribution normale¹.

En 1733 Abraham DeMoivre a développé l'équation mathématique de la courbe normale. Cela a fourni une base pour une grande partie de la théorie des statistiques inductives. La distribution normale est souvent appelée la distribution gaussienne en l'honneur de Karl Friedrich Gauss (1777-1855), qui a également dérivé son équation d'une étude des erreurs dans des mesures répétées de la même quantité.

I.2. Définitions

Une variable aléatoire X ayant la distribution en forme de cloche de la figure 1 est appelée *variable aléatoire normale*. L'équation mathématique de la distribution de probabilité de la variable normale continue dépend des deux paramètres μ et σ , respectivement, sa moyenne et de son écart-type. On désignera donc la fonction de densité de X par $N(x; \mu, \sigma)$.

La densité de probabilité de la variable aléatoire normale X , avec la moyenne μ et la variance σ^2 , est:

(1)

$$-\infty < x < +\infty$$

Où : $\pi = 3.14159\dots$ et $e = 2.71828$

La surface totale sous la courbe et au-dessus de l'axe horizontal est égale à 1 (Figure 1).

¹ Probability & statistics for engineers & scientists/Ronald E. Walpole . . . [et al.] — 9th ed.

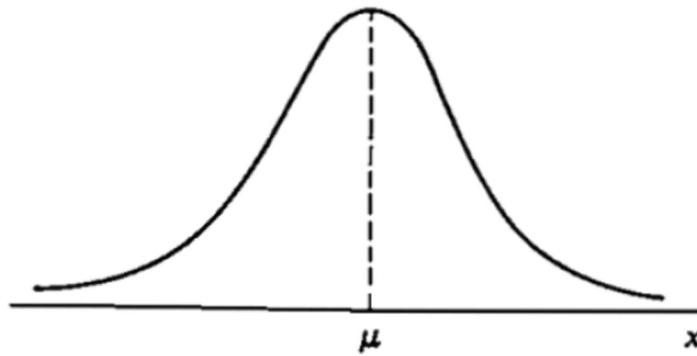


Figure 1: La courbe normale de Gauss

Plusieurs cas peuvent se présenter (Figures 2-4).

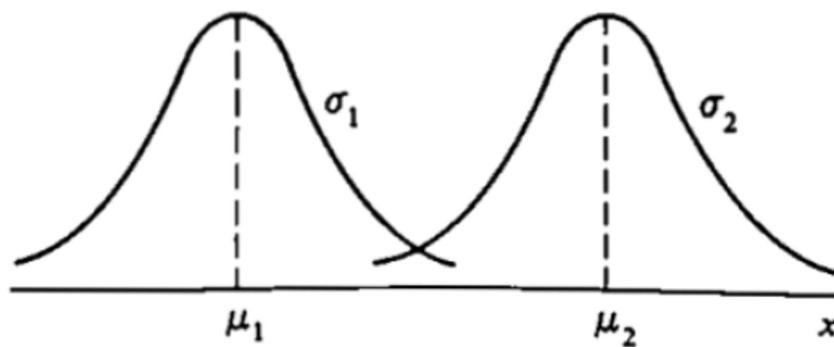


Figure 2: La courbe normale de Gauss avec $\mu_1 < \mu_2$ et $\sigma_1 = \sigma_2$

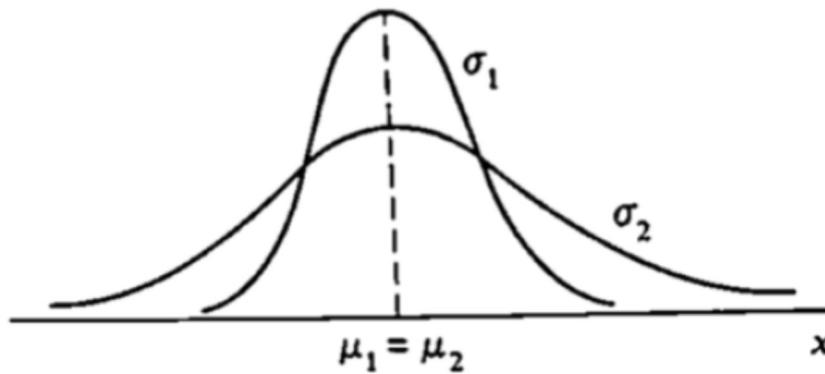


Figure 3: La courbe normale de Gauss avec $\mu_1 = \mu_2$ et $\sigma_1 < \sigma_2$

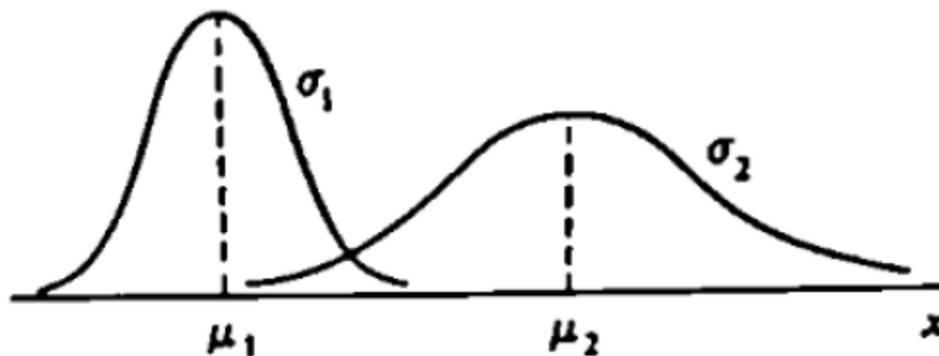


Figure 4: La courbe normale de Gauss avec $\mu_1 < \mu_2$ et $\sigma_1 < \sigma_2$

I.3. Aires sous la courbe normale

La courbe de toute distribution de probabilité continue ou fonction de densité est construite de sorte que l'aire sous la courbe délimitée par les deux ordonnées $x = x_1$ et $x = x_2$ soit égale à la probabilité P (équation 2) que la variable rand X prenne une valeur entre $x = x_1$ et $x = x_2$. Ainsi, pour la courbe normale de la figure 5, est représentée par l'aire de la région hachurée.

(2)

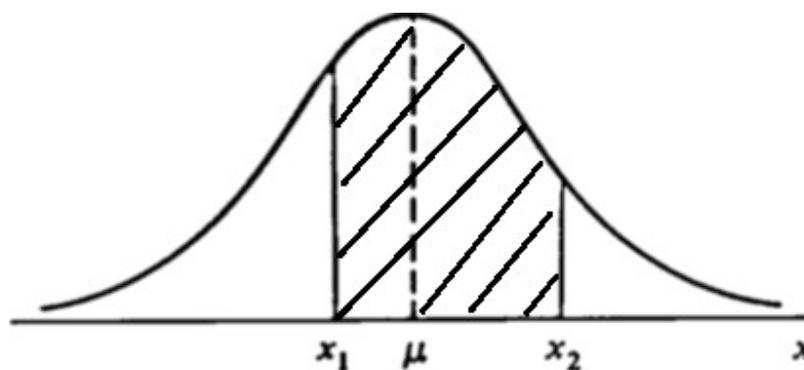


Figure 5: Aire de la zone hachurée selon l'équation 2

La difficulté rencontrée dans la résolution des intégrales des fonctions de densité normales réside dans la tabulation des aires sous les courbes normales pour une référence universelle. Cependant, ce serait une tâche sans issue de tenter de mettre en place des tables séparées pour chaque valeur imaginable de μ et σ . Heureusement, nous pouvons transformer toutes les observations d'une variable aléatoire normale X en un

nouvel ensemble d'observations d'une variable aléatoire normale Z avec une moyenne nulle une variance égale à l'unité. Ceci peut se faire par la transformation suivante :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (3)$$

Lorsque X prend la valeur x , la valeur correspondante de Z est donnée par $z = (x - \mu)/\sigma$. D'où, si X est cernée entre $x=x_1$ et $x=x_2$, la variable aléatoire correspondante Z est cernée à son tour entre $z_1 = (x_1 - \mu)/\sigma$ et $z_2 = (x_2 - \mu)/\sigma$. En conséquence, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} P(x_1 < X < x_2) &= \int_{x_1}^{x_2} N(x; \mu, \sigma) dx = \frac{1}{\sqrt{2\sigma\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \int_{z_1}^{z_2} N(z; 0, 1) dz = P(z_1 < Z < z_2) \end{aligned} \quad (4)$$

La distribution normale originale et transformée est représentée par la figure 6.

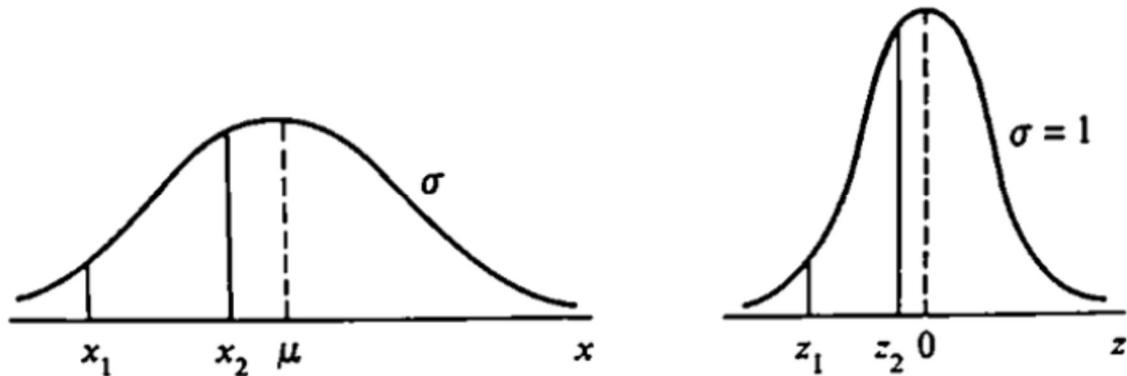


Figure 6: La distribution normale originale et transformée

Nous avons ainsi réduit le nombre illimité de tableaux en un tableau unique (Tableau 1) et universelle appelée distribution normale standard. Le tableau 1 donne l'aire sous la courbe normale standardisée qui correspond à la probabilité $P(Z < z)$ pour z entre -3.4 et +3.4. Comme la distribution normale est symétrique le tableau est réduit aux valeurs positives uniquement.

A titre d'exemple, cherchons la probabilité pour $Z < 1.96$. Premièrement, nous localisons la valeur de $z = 1.9$ sur la colonne de gauche, puis on ira sur cette ligne vers la droite jusqu'à la colonne sous (0,06), où on lit la valeur 0,9750. Donc, $P(Z < 1,96) = 0,9750$ soit 97,50%.

On notera « z » par « u » dans le tableau 1 et dans tout ce qui suit. Cette variable est dite « variable centrée réduite de Gauss ».

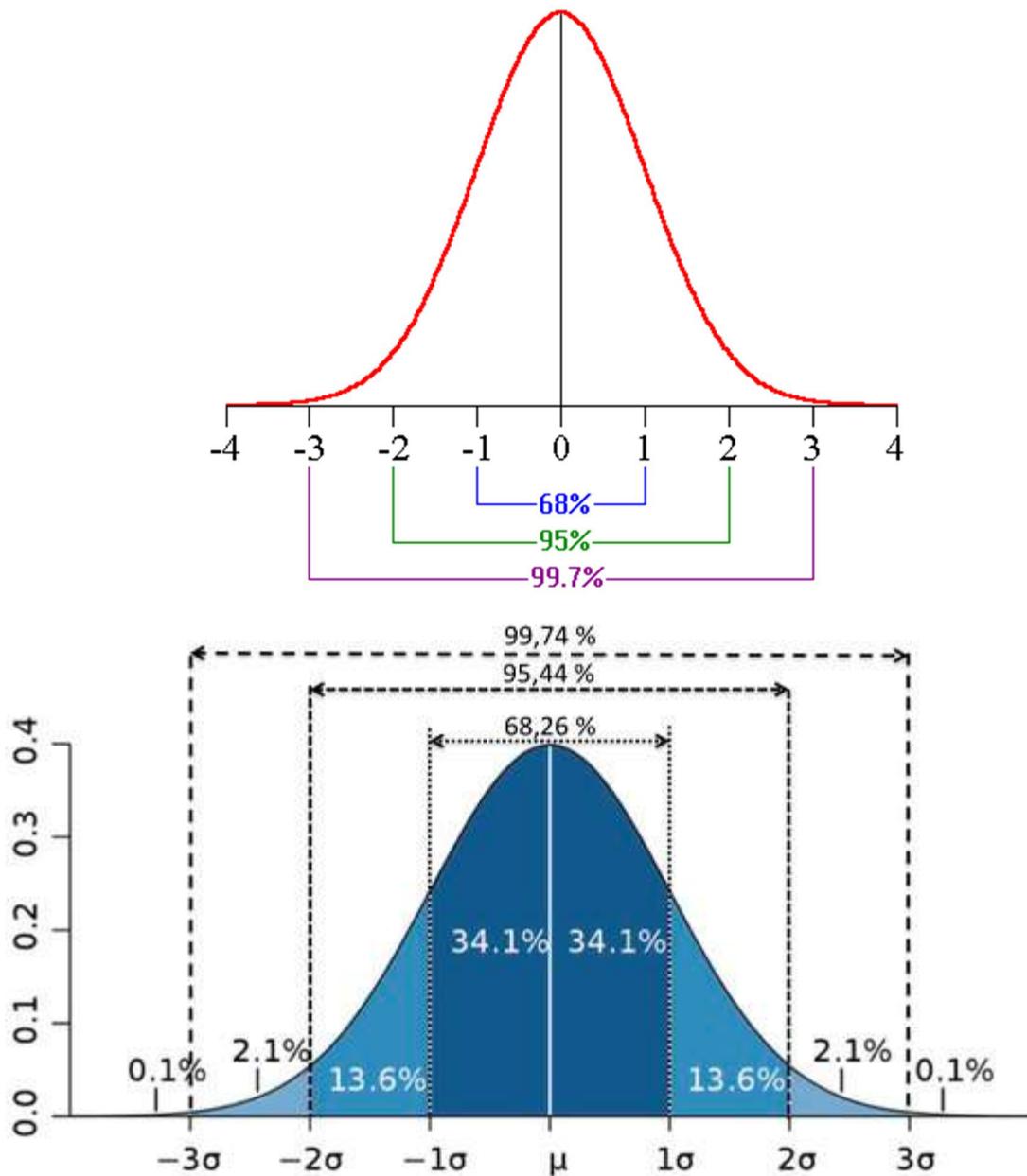


Figure 7: Symétrie de la cloche de Gauss et valeurs caractéristiques

I.4. Exemple d'application de la loi normale de Gauss

Dans ce qui suit la loi normale de Gauss a été ajustée aux pluies annuelles de la station pluviométrique de Batna. Les calculs nécessaires sont consignés dans le tableau 2 et la représentation graphique de l'ajustement est donnée par la Figure 8.

NB: Tous les détails de calculs ainsi que d'autres éclaircissement seront exposés au cours des séances des travaux dirigés (TD).

Tableau 2: Résultats numériques de l'ajustement de la loi normale aux pluies annuelles de la station pluviométrique de Batna (logiciel Hydrolab2010)

		Ajustement à une loi de Gauss					% U Anderson =	0,158
	Moyenne=	372,89			Taille n=	46	I.C. à (en%)=	95
	Ecart-type=	95,75			Nb au départ	(47)	U Gauss=	1,960
Observations	Valeurs	Ordre de classement	Fréquence	Variable réduite	Valeur expérimentale	Valeur théorique	Borne inférieure	Borne supérieure
classées	Précipitation (mm)		expérimentale					
Obs.16	217	1	0,0109	2,295	217	153,14506	88,5269901	198,61249
Obs.19	242	2	0,0326	1,844	242	196,34274	141,202418	236,09707
Obs.8	246	3	0,0543	1,604	246	219,29330	168,934621	256,26609
Obs.14	247	4	0,0761	1,432	247	235,78111	188,712370	270,90086
Obs.30	274	5	0,0978	1,294	274	248,98147	204,440683	282,72367
Obs.1	291	6	0,1196	1,177	291	260,17280	217,689418	292,83289
Obs.34	291	7	0,1413	1,074	291	270,00538	229,256024	301,78835
Obs.24	292	8	0,1630	0,982	292	278,85800	239,60429	309,91683
Obs.7	293	9	0,1848	0,897	293	286,97205	249,029249	317,42708
Obs.31	293	10	0,2065	0,819	293	294,51161	257,731061	324,46146
Obs.43	293	11	0,2283	0,745	293	301,59389	265,852315	331,12198
Obs.9	295	12	0,2500	0,674	295	308,30596	273,498594	337,48479
Obs.10	295	13	0,2717	0,608	295	314,71462	280,750595	343,60862
Obs.15	300	14	0,2935	0,543	300	320,87258	287,671678	349,54011
Obs.44	300	15	0,3152	0,481	300	326,82244	294,312767	355,31726
Obs.25	306	16	0,3370	0,421	306	332,59942	300,715663	360,97180
Obs.22	311	17	0,3587	0,362	311	338,23325	306,915345	366,53075
Obs.26	326	18	0,3804	0,304	326	343,74950	312,941632	372,01770
Obs.2	332	19	0,4022	0,248	332	349,17063	318,820397	377,45363
Obs.11	337	20	0,4239	0,192	337	354,51671	324,574494	382,85762
Obs.45	338	21	0,4457	0,137	338	359,80609	330,224470	388,24735
Obs.40	341	22	0,4674	0,082	341	365,05580	335,789140	393,63962
Obs.39	342	23	0,4891	0,027	342	370,28206	341,286063	399,05066
Obs.17	344	24	0,5109	0,027	344	375,50054	346,731941	404,49654
Obs.18	352	25	0,5326	0,082	352	380,72679	352,142984	409,99346
Obs.21	368	26	0,5543	0,137	368	385,97651	357,535252	415,55813
Obs.13	375	27	0,5761	0,192	375	391,26588	362,924988	421,20811

Obs.23	376	28	0,5978	0,248	376	396,61197	368,328971	426,96221
Obs.46	378	29	0,6196	0,304	378	402,03310	373,764902	432,84097
Obs.3	398	30	0,6413	0,362	398	407,54935	379,251853	438,86726
Obs.5	413	31	0,6630	0,421	413	413,18318	384,810807	445,06694
Obs.42	424	32	0,6848	0,481	424	418,96016	390,465339	451,46984
Obs.35	425	33	0,7065	0,543	425	424,91002	396,242496	458,11093
Obs.20	426	34	0,7283	0,608	426	431,06798	402,173985	465,03201
Obs.6	437	35	0,7500	0,674	437	437,47664	408,297813	472,28401
Obs.28	440	36	0,7717	0,745	440	444,18871	414,660622	479,93029
Obs.4	455	37	0,7935	0,819	455	451,27099	421,321147	488,05154
Obs.36	486	38	0,8152	0,897	486	458,81055	428,355520	496,75335
Obs.41	486	39	0,8370	0,982	486	466,92459	435,865776	506,17831
Obs.38	499	40	0,8587	1,074	499	475,77722	443,994257	516,52658
Obs.12	501	41	0,8804	1,177	501	485,60980	452,949717	528,09318
Obs.29	522	42	0,9022	1,294	522	496,80112	463,058934	541,34192
Obs.27	531	43	0,9239	1,432	531	510,00149	474,881744	557,07023
Obs.37	561	44	0,9457	1,604	561	526,48930	489,516515	576,84798
Obs.32	576	45	0,9674	1,844	576	549,43985	509,685536	604,58019
Obs.33	578	46	0,9891	2,295	578	592,63754	547,170109	657,25561

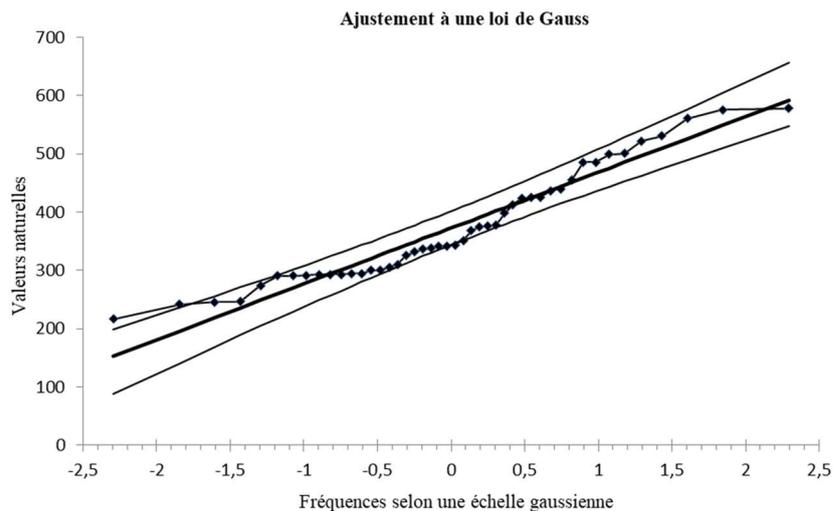


Figure 8: Résultats graphiques de l'ajustement de la loi normale aux pluies annuelles de la station pluviométrique de Batna (logiciel Hydrolab2010)

NB: Pour connaître comment sont calculées les valeurs dites bornes inférieures et bornes supérieures consignées dans le tableau 2 et visualisées graphiquement par la figure 8, on doit introduire la notion d'intervalle de confiance (IC).

I.5. Intervalle de confiance (IC)

L'intervalle de confiance (IC) permet d'expliquer l'importance des erreurs d'échantillonnage. Le choix du degré de confiance α est libre et dépend des considérations économiques concernant le risqué que le projeteur accepte. Ce degré est choisi d'autant plus élevé que l'on cherche la sécurité ou que l'on refuse le risqué trop grand.

Pour un degré de confiance α , on a les intervalles suivants:

- Grand échantillon ($N > 30$ pour la Moyenne et $N > 50$ pour l'écart type).

$$\hat{x} = \bar{x} \pm u_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (\text{pour la moyenne})$$

$$\hat{\sigma} = \bar{\sigma} \pm u_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \frac{\sigma}{\sqrt{2N}} \quad (\text{pour l'écart type})$$

u est la variable centrée réduite de Gauss (tabulée).

Pour les pluies annuelles de la station pluviométrique de Batna qui suit la loi normale de Gauss, les calculs donnent pour un IC = 95%:

$$\hat{P} = \bar{P} \pm u_{\left(\frac{1-0.95}{2}\right)} \frac{\sigma}{\sqrt{46}}$$

Comme $\bar{P} = 373$ mm et $\sigma = 95.8$ mm

$$\hat{P} = 373 \pm u_{\left(\frac{1-0.95}{2}\right)} \frac{95.8}{\sqrt{46}}$$

$$u_{\left(\frac{1-0.95}{2}\right)} = u_{(0.025)} = u_{(0.975)} = \pm 1.96$$

$$\hat{P} = 373 \pm 1.96 \frac{95.8}{\sqrt{46}} = 373 \pm 28$$

Alors:

$$345 \text{ mm} < \hat{P} < 401 \text{ mm}$$

A titre d'exemple, calculons la valeur estimée de la pluie ayant une période de retour $T = 7$ ans.

$T = 7$ ans correspond à une fréquence (ou probabilité) $f = 1 - (1/T) = 1 - (1/7) = 0.857$.

$f = 0.857$ correspond à une variable centrée réduite de Gauss $u = 1.067$.

$$P_{f=0.857} = P_{T=7\text{ans}} = \hat{P} + \sigma * u = 373 + 95.8 * 1.067 = 475 \text{ mm.}$$

La borne supérieure et la borne inférieure seront égale:

Pborne sup,inf =

$$475 \pm \frac{u_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}{\sqrt{N}} \frac{\sqrt{1 + \frac{u_{(0.857)}^2}{2} + \frac{u_{0.857} * u_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}^2}{2N}}}{1 - \frac{u_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}^2}{2N}} * \sigma$$

Pborne sup,inf =

$$475 \pm \frac{u_{1.96}}{\sqrt{46}} \frac{\sqrt{1 + \frac{1.067^2}{2} + \frac{1.067 * 1.96^2}{2 * 46}}}{1 - \frac{1.96^2}{2 * 46}} * 95.8$$

$$475 \pm \frac{\frac{u_{1.96}}{\sqrt{46}}}{1 - \frac{1.96^2}{2 * 46}} = \frac{P_{borne\ sup,inf} = \sqrt{1 + \frac{1.067^2}{2}} + \frac{1.067 * 1.96^2}{2 * 46}}{1 - \frac{1.96^2}{2 * 46}} * 95.8$$

$$P_{borne\ sup,inf} = 475 \pm 41\ mm$$

II. La loi des valeurs extremes de Gumbel

II.1. Introduction

Considérons les résultats d'un nombre fini N d'observations portant sur une distribution statistique illimitée. Parmi ces résultats, il y en aura toujours une valeur (ou plusieurs) qui dépasseront toutes les autres, tout en restant finie puisque évidemment nous ne pouvons observer que des valeurs finies. Il s'agit de préciser cette valeur maximum et d'analyser la manière dont elle croît avec le nombre des observations.

La distribution de probabilité continue la plus importante dans l'ensemble du domaine des statistiques des valeurs extrêmes est la loi de Gumbel² dont la fonction de repartition s'écrit:

$$F(u) = e^{-e^{-u}}$$

Avec:

$$u = \frac{x - x_0}{g}$$

Où:

x : est la variable à étudier, x_0 est le paramètre de position de la loi (le mode) et g : est le paramètre d'échelle de la loi (gradex: gradient-exponentiel).

$$x_0 = \bar{x} - 0.577g$$

$$g = 0.78\sigma$$

u est la variable centrée réduite de Gumbel qui s'obtient par:

$$u = -\ln(-\ln(F))$$

II.2. Exemple d'application de la loi des valeurs extrêmes de Gumbel

Dans ce qui suit la loi de Gumbel a été ajustée aux pluies maximales journalières de la station pluviométrique de Batna. Les calculs nécessaires sont consignés dans le tableau 3 et la représentation graphique de l'ajustement est donnée par la Figure 9.

² Emil Julius Gumbel (1891-1966), allemand.

NB: Tous les détails de calculs ainsi que d'autres éclaircissements seront exposés au cours des séances des travaux dirigés (TD).

Tableau 3: Résultats numériques de l'ajustement de la loi de Gumbel aux pluies maximales journalières de la station pluviométrique de Batna (logiciel Hydrolab2010)

			Ajustement à une loi de Gumbel				% U Ander- son =	0,234
	Mode=	28,981025			Taille n=	75	I.C. à (en%)=	95
	Gradex=	10,380661			Nb au dé- part	(76)	U Gauss=	1,960
Observa- tions	Valeurs	Ordre de	Fréquence	Variable	Valeur	Valeur	Borne	Borne
classées	PjmaxBatna	classement	expérimen- tale	réduite	expérimen- tale	théo- rique	inférieure	supérieure
Obs.44	12,3	1	0,0067	-1,612	12,3	12,252	6,4831546	16,12767
Obs.51	13,1	2	0,0200	-1,364	13,1	14,821	9,7280558	18,32853
Obs.46	14,3	3	0,0333	-1,224	14,3	16,274	11,546414	19,58889
Obs.12	17,2	4	0,0467	-1,120	17,2	17,355	12,89058	20,5367
Obs.63	17,2	5	0,0600	-1,034	17,2	18,243	13,987493	21,32231
Obs.34	18,4	6	0,0733	-0,960	18,4	19,011	14,930285	22,00765
Obs.50	20,1	7	0,0867	-0,894	20,1	19,697	15,766971	22,62474
Obs.66	20,3	8	0,1000	-0,834	20,3	20,323	16,525798	23,19251
Obs.24	20,5	9	0,1133	-0,778	20,5	20,903	17,224894	23,72314
Obs.15	20,7	10	0,1267	-0,726	20,7	21,448	17,876641	24,22502
Obs.55	20,7	11	0,1400	-0,676	20,7	21,963	18,489906	24,70419
Obs.16	21	12	0,1533	-0,629	21	22,455	19,071269	25,16518
Obs.21	21	13	0,1667	-0,583	21	22,927	19,625768	25,61148
Obs.71	21,1	14	0,1800	-0,539	21,1	23,383	20,157351	26,04585
Obs.56	22,1	15	0,1933	-0,497	22,1	23,825	20,669179	26,47055
Obs.17	22,5	16	0,2067	-0,455	22,5	24,255	21,163827	26,88745
Obs.3	23,6	17	0,2200	-0,415	23,6	24,675	21,64343	27,29809
Obs.18	23,6	18	0,2333	-0,375	23,6	25,086	22,10978	27,70383
Obs.40	23,7	19	0,2467	-0,336	23,7	25,49	22,564403	28,10583
Obs.32	23,8	20	0,2600	-0,298	23,8	25,888	23,008612	28,50509
Obs.58	24	21	0,2733	-0,260	24	26,281	23,443554	28,90254
Obs.10	24,4	22	0,2867	-0,223	24,4	26,669	23,870238	29,29899
Obs.37	25,3	23	0,3000	-0,186	25,3	27,054	24,289564	29,69517
Obs.45	25,4	24	0,3133	-0,149	25,4	27,436	24,702341	30,09178
Obs.31	26	25	0,3267	-0,112	26	27,816	25,109306	30,48945
Obs.64	26,8	26	0,3400	-0,076	26,8	28,194	25,511136	30,88876
Obs.61	27,3	27	0,3533	-0,040	27,3	28,57	25,908459	31,29029
Obs.28	28,4	28	0,3667	-0,003	28,4	28,947	26,301864	31,69456
Obs.27	29,2	29	0,3800	0,033	29,2	29,323	26,691908	32,10209
Obs.6	29,9	30	0,3933	0,069	29,9	29,7	27,079125	32,51339
Obs.43	30,5	31	0,4067	0,106	30,5	30,077	27,464026	32,92894
Obs.22	32	32	0,4200	0,142	32	30,457	27,847113	33,34924
Obs.74	32,6	33	0,4333	0,179	32,6	30,837	28,228875	33,77476
Obs.39	32,7	34	0,4467	0,216	32,7	31,221	28,609795	34,206
Obs.42	32,9	35	0,4600	0,253	32,9	31,607	28,990358	34,64346

Lois de distribution usuelles appliquées en hydrologie

Obs.14	33,2	36	0,4733	0,290	33,2	31,996	29,371046	35,08765
Obs.33	33,5	37	0,4867	0,328	33,5	32,389	29,752348	35,53909
Obs.59	34,3	38	0,5000	0,367	34,3	32,786	30,134763	35,99833
Obs.60	34,3	39	0,5133	0,405	34,3	33,187	30,5188	36,46595
Obs.5	35,1	40	0,5267	0,444	35,1	33,595	30,904983	36,94255
Obs.52	35,2	41	0,5400	0,484	35,2	34,007	31,293856	37,42877
Obs.72	36,2	42	0,5533	0,525	36,2	34,427	31,685986	37,92529
Obs.49	36,8	43	0,5667	0,566	36,8	34,853	32,081969	38,43287
Obs.2	37	44	0,5800	0,607	37	35,287	32,482431	38,95229
Obs.7	37,6	45	0,5933	0,650	37,6	35,729	32,888038	39,48441
Obs.1	38,4	46	0,6067	0,694	38,4	36,181	33,299502	40,03018
Obs.20	38,8	47	0,6200	0,738	38,8	36,643	33,717583	40,59063
Obs.26	39	48	0,6333	0,784	39	37,115	34,143108	41,16689
Obs.73	39,3	49	0,6467	0,830	39,3	37,6	34,576971	41,76023
Obs.54	39,7	50	0,6600	0,878	39,7	38,098	35,02015	42,37203
Obs.65	39,8	51	0,6733	0,928	39,8	38,61	35,473724	43,00387
Obs.4	39,9	52	0,6867	0,978	39,9	39,138	35,938884	43,65749
Obs.57	40,8	53	0,7000	1,031	40,8	39,683	36,41696	44,33487
Obs.11	41,5	54	0,7133	1,085	41,5	40,247	36,909444	45,03825
Obs.69	42,8	55	0,7267	1,142	42,8	40,832	37,418022	45,77019
Obs.68	45,2	56	0,7400	1,200	45,2	41,441	37,944617	46,53365
Obs.23	46	57	0,7533	1,261	46	42,076	38,491436	47,33201
Obs.13	46,2	58	0,7667	1,325	46,2	42,739	39,061037	48,16927
Obs.41	46,4	59	0,7800	1,392	46,4	43,436	39,656411	49,05008
Obs.25	46,5	60	0,7933	1,463	46,5	44,169	40,281094	49,98001
Obs.9	46,6	61	0,8067	1,538	46,6	44,945	40,939308	50,9657
Obs.29	47,7	62	0,8200	1,617	47,7	45,769	41,636166	52,01525
Obs.8	48,1	63	0,8333	1,702	48,1	46,649	42,377943	53,13861
Obs.48	48,3	64	0,8467	1,793	48,3	47,594	43,172466	54,34823
Obs.19	48,8	65	0,8600	1,892	48,8	48,618	44,029679	55,65996
Obs.38	49,6	66	0,8733	1,999	49,6	49,734	44,962499	57,09443
Obs.70	49,9	67	0,8867	2,118	49,9	50,966	45,988138	58,67915
Obs.36	51,7	68	0,9000	2,250	51,7	52,341	47,130263	60,45201
Obs.62	51,9	69	0,9133	2,401	51,9	53,902	48,422711	62,46726
Obs.67	52,4	70	0,9267	2,575	52,4	55,71	49,916327	64,80645
Obs.30	57	71	0,9400	2,783	57	57,867	51,692732	67,60062
Obs.47	59,6	72	0,9533	3,041	59,6	60,548	53,895658	71,08073
Obs.53	60	73	0,9667	3,384	60	64,112	56,81628	75,71503
Obs.75	64,6	74	0,9800	3,902	64,6	69,486	61,206619	82,71407
Obs.35	78,5	75	0,9933	5,007	78,5	80,96	70,549357	97,69169

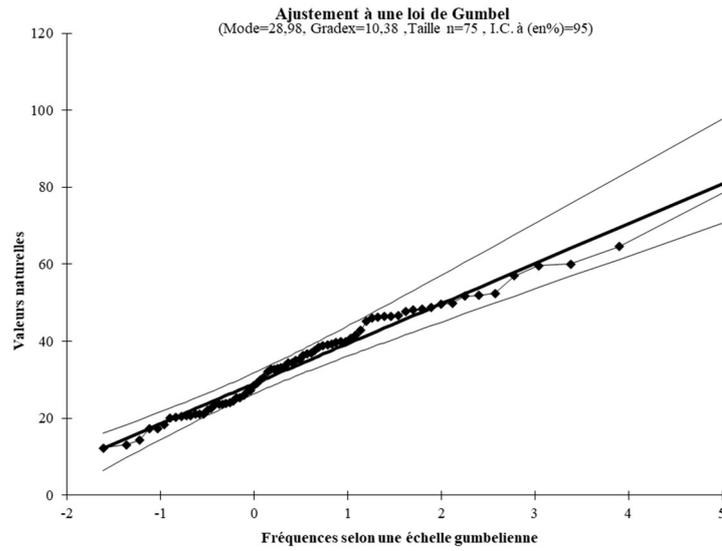


Figure 9: Résultats graphiques de l'ajustement de la loi de Gumbel aux pluies maximales journalières de la station pluviométrique de Batna (logiciel Hydrolab2010)