Corrigé type du TD n° 1 M3

2019/2020

Ex 2 :

1) • $\int_0^1 \int_1^2 xy \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\int_1^2 xy \, dx \right] dy =$

$\int_0^1 \left[y \cdot \frac{x^2}{2} \right]_1^2 dy = \int_0^1 \left[\frac{y}{2}(4-1) \right] dy = \frac{3}{2} \int_0^1 y \, dy =$

$\frac{3}{2} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{4}(1-0) = \frac{3}{4}$

• $\int_1^2 \int_0^1 xy \, dy \, dx = \int_1^2 \left[\int_0^1 xy \, dy \right] dx =$

$\int_1^2 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_0^1 dx = \int_1^2 \left[\frac{x}{2}(1-0) \right] dx = \frac{1}{2} \int_1^2 x \, dx =$

$\frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{1}{4}(4-1) = \frac{3}{4}$

Conclusion : quand les bornes d'intégration sont fixes intégrer en premier par rapport à y et ensuite par rapport à x ou intégrer en premier par rapport à x puis par rapport à y cela donne le même résultat.

• $\int_0^1 \int_1^2 xy \, dx \, dy = \left(\int_1^2 x \, dx \right) \cdot \left(\int_0^1 y \, dy \right) =$

$\left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \left[\frac{1}{2}(4-1) \right] \left[\frac{1}{2}(1-0) \right] = \left(\frac{3}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

quand les bornes d'intégration sont fixes et les variables de la fct sont séparables on peut calculer l'intégral par un produit.

2) • $\int_0^1 \int_y^{y+1} x^2 y \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\int_y^{y+1} x^2 y \, dx \right] dy =$ ← Chemin obligatoire

$\int_0^1 \left[y \cdot \frac{x^3}{3} \right]_y^{y+1} dy = \int_0^1 \left(y \cdot \frac{(y+1)^3}{3} - \frac{y \cdot y^3}{3} \right) dy =$

$\int_0^1 \left(\frac{y^4}{3} + \frac{3y^3}{3} + \frac{3y^2}{3} + \frac{y}{3} - \frac{y^4}{3} \right) dy =$ ← $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

$\int_0^1 \left(y^3 + y^2 + \frac{1}{3} y \right) dy =$

$\left[\frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{4}$

• $\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^x e^{y/x} \, dy \, dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\int_0^x e^{y/x} \, dy \right] dx =$ ← Chemin obligatoire

$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left[x e^{y/x} \right]_0^x dx =$

$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left[x e^{\frac{x}{x}} - x e^{\frac{0}{x}} \right] dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 x(e-1) \, dx =$

$(e-1) \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \left(\frac{e-1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{8}(e-1)$

N.B. : $\int_0^x e^{y/x} \, dy \longrightarrow$ de la forme $\int f' e^f = e^f$

$f = \frac{y}{x}$ et $f' = \frac{1}{x}$

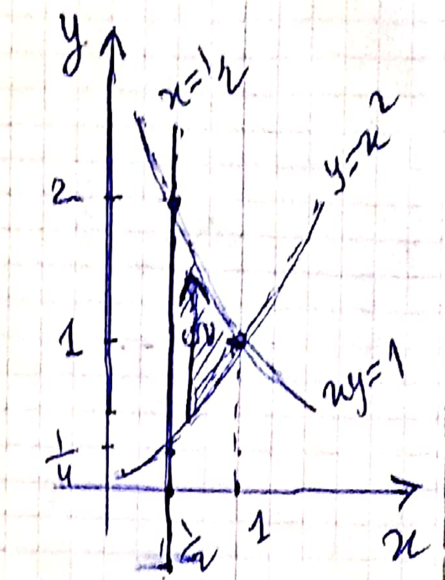
3) $\iint_{\Omega} dx\,dy$ mesure l'aire de la zone Ω.

Tout d'abord Calculons les pts d'intersection des courbes qui délimitent Ω :

$\begin{cases} xy = 1 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (1, 1)$

$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (\frac{1}{2}, 2)$



- $1^{ère}$ méthode :

Intégrer selon oy :

$$\iint_{\Omega} dx\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{x^2}^{\frac{1}{x}} dy\,dx = $$

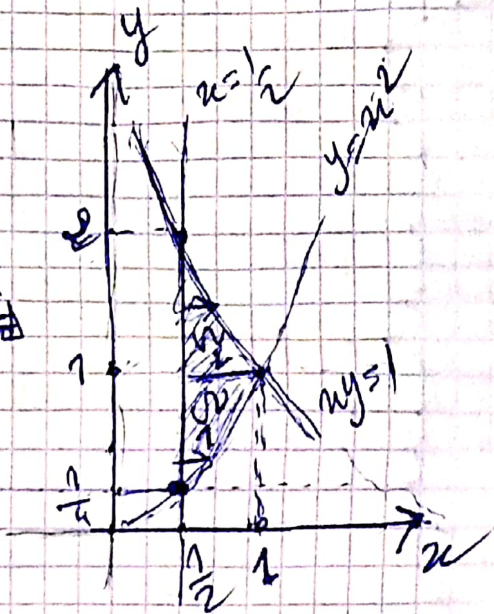
$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[\int_{x^2}^{1/x} dy \right] dx = \int_{1/2}^{1} [y]_{x^2}^{1/x} \cancel{dy} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} [\tfrac{1}{x} - x^2]dx =$$

$$\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{x} - \int_{1/2}^{1} x^2 dx = \left[\ln x - \frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \ln 2 - \frac{7}{24}$$

2ème méthode :

intégrer selon ox

$$\iint_{\Omega} dx\,dy = \iint_{\Omega_1} dx\,dy + \iint_{\Omega_2} dx\,dy =$$



$$\int_{\frac{1}{4}}^{1}\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} dx\,dy + \int_{1}^{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1/y} dx\,dy =$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left[\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} dx\right]dy + \int_{1}^{2}\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1/y} dx\right]dy =$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left[\sqrt{y} - \frac{1}{2}\right]dy + \int_{1}^{2}\left[\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right]dy =$$

$$\left[\frac{2}{3}\cdot y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}y\right]_{\frac{1}{4}}^{1} + \left[\ln y - \frac{1}{2}y\right]_{1}^{2} = \ln 2 - \frac{7}{24}$$

Conclusion :

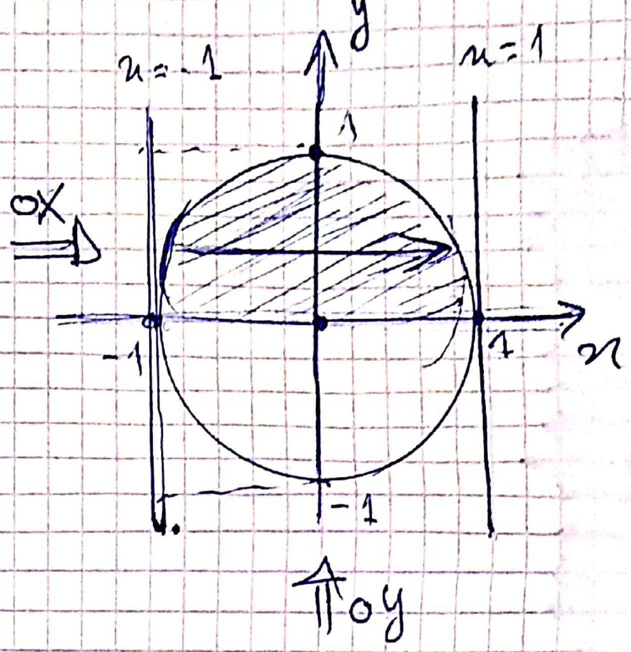
Expliquez aux étudiants la différence entre un domaine régulier et irrégulier.

Dans ce cas : le domaine est régulier en y et irrégulier en x

4) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx$: l'ordre d'intégration est : selon oy.

domaine d'intégration :

$$\begin{cases} x=1 \ , \ x=-1 \\ y=0 \ , \ y=\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$



selon oX :

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \end{cases}$$

donc :

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx \longrightarrow$$

$$\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

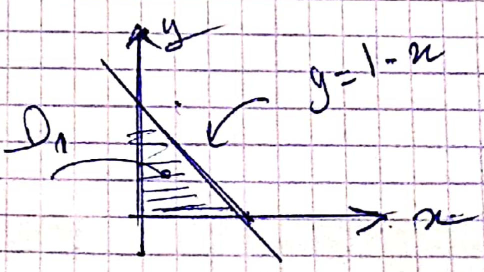
N.B. : $y=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2 = 1-x^2 \Rightarrow x^2 = 1-y^2$

$x = \pm\sqrt{1-y^2}$

$x^2+y^2=1$: equation d'1 cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

Ex 3 :

A. Calculons $\iint_{D_1} \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^4 dy\,dx$ par le changement de variable : $u=x-y$ et $v=x+y$



• Exprimons x, y en fonction de u, v :

$$\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u+v = 2x \\ v-u = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{v-u}{2} \end{cases}$$

• Calculons le Jacobien J :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = +\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

l'intégrale devient alors : $\iint_{D'} \frac{u^4}{v^4} \cdot \frac{1}{2} \cdot du\, dv$

• Les bornes d'intégration : D'

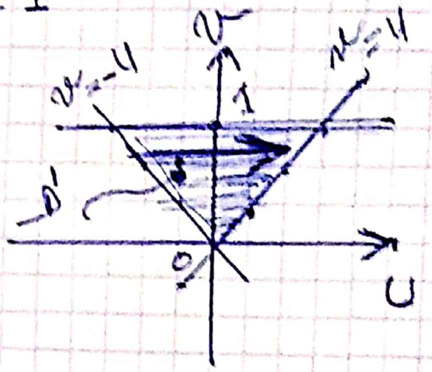
$x = 0 \Rightarrow \frac{u+v}{2} = 0 \Rightarrow v = -u$

$y = 0 \Rightarrow \frac{v-u}{2} = 0 \Rightarrow v = u$

$y = 1-x \Rightarrow \frac{v-u}{2} = 1 - \frac{u+v}{2} \Rightarrow v = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} -v \leq u \leq v \\ 0 \leq v \leq 1 \end{cases}$

Domaine régulier en u (irrégulier en v) $\xRightarrow{Ou}$



donc intégrons selon Ou :

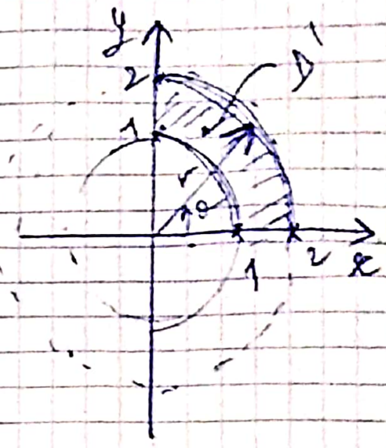
$$\int_0^1 \int_{-v}^{v} \frac{u^4}{v^4} \cdot \frac{1}{2} \cdot du\, dv =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left[\int_{-v}^{v} \frac{u^4}{v^4} du \right] dv = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\left[\frac{v^5}{5v^4} \right] - \left[\frac{-v^5}{5v^4} \right] \right) dv =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2v^5}{5v^4} dv = \frac{1}{5} \int_0^1 v\, dv = \frac{1}{5} \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^1 =$$

$$\frac{1}{5} \left[\frac{1}{2} - 0 \right] = \frac{1}{10}$$

B. Calculons $\iint_{D_2} dx\,dy$ en utilisant les coordonnées polaires :



- les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

- le Jacobien $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

- les bornes d'intégration : D'

$$\begin{cases} 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \Rightarrow 1 \leq r^2 \leq 4 \Rightarrow 1 \leq r \leq 2 \\ x \geq 0 \Rightarrow r\cos\theta \geq 0 \Rightarrow \cos\theta \geq 0 \\ y \geq 0 \Rightarrow r\sin\theta \geq 0 \Rightarrow \sin\theta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 1^{er} \text{ quart} \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{array}$$

l'intégrale devient alors : $\iint_{D'} \frac{1}{r^2} \cdot r \cdot dr\,d\theta$

$$\int_0^{\pi/2} \int_1^2 \frac{r\,dr\,d\theta}{r^2} =$$

$$\left(\int_1^2 \frac{dr}{r}\right) \cdot \left(\int_0^{\pi/2} d\theta\right) = [\ln r]_1^2 \cdot [\theta]_0^{\pi/2} =$$

$$[\ln 2 - \ln 1] \cdot \left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{\pi}{2}\ln 2$$

Exo : 4

- $I_1 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 xyz\,dx\,dy\,dz = \left(\int_0^1 x\,dx\right)\left(\int_0^1 y\,dy\right) \cdot \left(\int_0^1 z\,dz\right) =$

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1 \cdot \left(\frac{y^2}{2}\right)_0^1 \cdot \left(\frac{z^2}{2}\right)_0^1 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

- $I_2 = \int_0^1 \int_2^3 \int_0^x 3x \, dz \, dx \, dy =$

$\int_0^1 \left[\int_2^3 \left[\int_0^x 3x \, dz \right] dx \right] dy =$

$\int_0^1 \left[\int_2^3 \left[3xz \Big/_0^x \right] dx \right] dy =$

$\int_0^1 \left[\int_2^3 3x^2 \, dx \right] dy = \int_0^1 \left(\frac{3x^3}{3} \Big/_2^3 \right) dy =$

$\int_0^1 19 \, dy = 19 \, y \Big/_0^1 = 19$

- $I_3 = \int_0^1 \int_0^x \int_0^{x+y} xyz \, dy \, dx \, dz$

$I_3 = \int_0^1 \int_0^x \int_0^{x+y} xyz \, dz \, dy \, dx =$

$\int_0^1 \int_0^x \left[xy \frac{z^2}{2} \right]_0^{x+y} dy \, dx =$

$\int_0^1 \int_0^x \left[\frac{xy(x+y)^2}{2} \right] dy \, dx = \int_0^1 \int_0^x \left(\frac{x^3 y}{2} + \frac{xy^3}{2} + x^2 y^2 \right) dy \, dx =$

$\int_0^1 \left[\frac{x^3 y^2}{4} + \frac{x^2 y^3}{3} + \frac{xy^4}{8} \right]_0^x dx = \int_0^1 \left(\frac{x^5}{4} + \frac{x^5}{3} + \frac{x^5}{8} \right) dx =$

$\int_0^1 \frac{17}{24} x^5 \, dx = \frac{17}{24} \int_0^1 x^5 \, dx = \frac{17}{144} \Big/_0^1 = \frac{17}{144}$