Solution EX01 :

A) 1) $U_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{(A+B)n + A}{n(n+1)}$

par identification : $\begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases} \Rightarrow U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$S_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots$$
$$+ \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$

Donc la série converge et sa somme $S = 1/2$

2) $\sum_1^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_1^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$$S_n = \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \dots$$
$$+ \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{2 \times 3 \times 4 \times \dots n.(n+1)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots (n-1).n}\right) = \ln(n+1)$$

$S_n = \ln(n+1)$, $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$

Donc la série diverge.

Scanned by CamScanner

B) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{5}{(-2)^n}$

$$S = \sum_{3}^{+\infty} \frac{5}{(-2)^n} = 5 \sum_{3}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n =$$

$$5\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \left(-\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots\cdots\right] =$$

$$5 \cdot \left(\frac{1}{-2}\right)^3 \left[1 + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots\cdots}\right]$$

série géométrique de raison $-\frac{1}{2} \in]-1,1[$

converge vers sa somme $\Sigma \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$$S = -\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{-5}{12}$$

c)

1) $\lim_{n \to +\infty} \operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2} \neq 0 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \operatorname{arctg} n$

est divergente (la condition nécessaire de convergence n'étant pas vérifiée)

2) $\lim_{n \to +\infty} \ln n = +\infty \neq 0 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \ln n$ D.V.

Scanned by CamScanner

3/ $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(\frac{n+1}{n}.\pi\right) = \cos\pi = -1 \neq 0$

donc $\sum \cos\left(\frac{n+1}{n}.\pi\right)$ est D.V.

4/ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\,\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty \times 0$: FI

$U_n = \sqrt{n}\,\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}.\frac{1}{\sqrt{n}} \sim 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 1 \neq 0 \Rightarrow$ la série diverge.

Scanned by CamScanner

Ex ϕ N° 2 :

1) a. $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sqrt[9]{n^3+n^2+1}}{\sqrt{n^4+n^3+2}}$

$$u_n = \frac{\sqrt[9]{n^3+n^2+1}}{\sqrt{n^4+n^3+2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt[9]{n^3}}{\sqrt{n^4}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{3/9}}{n^{4/2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{\frac{1}{3}}}{n^2}$$

$u_n \simeq \frac{1}{n^{5/3}}$ et comme $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/3}}$ est C-V.

(série de Riemann $\alpha = 5/3 > 1$) $\Rightarrow$

$\sum_{1}^{\infty} \frac{\sqrt[9]{n^3+n^2+1}}{\sqrt{n^4+n^3+2}}$ est C-V.

b. $\sum_{0}^{\infty} \sin \frac{1}{2^n}$

on a : $0 \leq \sin \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ et comme $\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

est convergente (série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$), alors $\sum_{0}^{\infty} \sin \frac{1}{2^n}$

est convergente aussi par comparaison.

2) a. $\sum_{n \geq 2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$, $\forall\, n > 2$, $\ln n \geq 1 \Rightarrow \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ et comme $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{1/2}}$ est D.V.

(série de Riemann $\alpha = \frac{1}{2} < 1$) $\Rightarrow \sum_{2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ est

D.V. aussi par comparaison

Scanned by CamScanner

b. $\sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n^{1/3}+1}$

$u_n = \frac{n+1}{n^{1/3}+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n^{1/3}} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n^{1/3}}$ et comme $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$

est D.V. (série de Riemann $\alpha = \frac{1}{3} < 1$), alors

$\sum_{1}^{\infty} \frac{n+1}{n^{1/3}+1}$ est divergente.

Exo 3 :

1) a. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n^2}{n}} =$

$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$

Donc la série est convergente.

b. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1+n}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n = e$

$e > 1 \Rightarrow$ la série diverge.

2) a. $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} =$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1).n!.n^n}{(n+1)^n.(n+1).n!} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} = e^{-1} < 1$

donc la série converge.

b. $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,n!\;a^n}{a^n.a.n!} =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{a} = +\infty > 1 \Rightarrow$ la série diverge.

Scanned by CamScanner

Exo 4 :

1. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n}$ à termes décroissants $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \cdots$

$\frac{1}{2\ln 2} > \frac{1}{3\ln 3} > \cdots\cdots$

Appliquons le critère de comparaison avec une intégrale :

on pose : $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$.

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{dx}{x\ln x}$$ (Intégrale impropre)

on pose $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$$\lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to\infty} \left[\ln|\ln x|\right]_2^b =$$

$$\lim_{b\to\infty} \left[\ln|\ln b| - \ln|\ln 2|\right] = +\infty$$

L'intégrale diverge $\Rightarrow \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n}$ diverge.

2. $\sum_{n\geq 1} e^{1/n}$, $\lim_{n\to\infty} e^{1/n} = e^0 = 1 \neq 0 \Rightarrow$

$\sum e^{1/n}$ est D.V. (Condition nécessaire de <u>convergence</u> n'est pas vérifiée).

3. $\sum_{n\geq 1} \ln(1+e^{-n})$; $\ln(1+e^{-n}) \underset{+\infty}{\sim} e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$

et comme $\sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ est convergente (série géométrique de raison $\frac{1}{e} \in]-1,1[$) $\Rightarrow \sum_1^{\infty} \ln(1+e^{-n})$ est convergente.

Scanned by CamScanner

4. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$

Comme $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ est divergente (série harmonique)

donc $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est divergente.

5. $\sum_{n\geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, Appliquons le critère de D'Alembert:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2 \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)!}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \left(\frac{(n+1)\cdot n!}{n!}\right)^2 \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)(2n+1)\cdot(2n)!}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{4} < 1$$

Donc la série converge.

6. $\sum_{n\geq 1} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$

$1-\cos\frac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann $\alpha=2>1$)

alors $\frac{1}{2}\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente aussi $\Rightarrow \sum_{1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$

est convergente.

Scanned by CamScanner

7. $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n\log n}$; Appliquons le critère de Cauchy :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n\log n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\log n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 0 < 1$$

Donc la série converge.

N.B. : $n \to +\infty$ $\quad q^n = \begin{cases} \infty & \text{si } q > 1 \\ 0 & \text{si } q < 1 \end{cases}$

8. $\sum_{n\geq 0} \frac{5^n + (-2)^n}{10^n} = \sum_0^{\infty} \left(\frac{5}{10}\right)^n + \sum_0^{\infty} \left(\frac{-2}{10}\right)^n$

- $\sum \left(\frac{5}{10}\right)^n$: SG de raison $\frac{5}{10} \in]-1, 1[$ converge vers sa somme $S_1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

- $\sum \left(\frac{-2}{10}\right)^n$: S.G. de raison $\frac{-2}{10} \in]-1,1[$ converge vers sa somme $S_2 = \frac{1}{1 - \frac{-1}{5}} = \frac{5}{6}$

Donc $\sum \frac{5^n + (-2)^n}{10^n}$ est convergente et converge vers sa somme $S = S_1 + S_2 = 2 + \frac{5}{6} = \frac{17}{6}$

N.B. : série CV + série CV = série CV

9. $\sum_1^{\infty} n^2 . \sin \frac{\pi}{2^n}$,

on a : $\sin \frac{\pi}{2^n} \leq \frac{\pi}{2^n} \Rightarrow n^2 \sin \frac{\pi}{2^n} \leq n^2 . \frac{\pi}{2^n}$

Scanned by CamScanner

Etudions la nature de la série $\sum_{1}^{\infty} n^2 \frac{\pi}{2^n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2\pi}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2 \cdot \pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} =$$

$\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum n^2 \frac{\pi}{2^n}$ est C.V. , alors

$\sum n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$ est convergente aussi (par comparaison)

<u>10.</u> $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$, $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$, $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$

utilisons le critère du quotient :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\right) / \left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{3/2} \cdot \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2} \cdot n^{1/2}}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1 > 0$$

donc $\sum \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ et $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ sont de même nature

et comme $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est CV ($S.R$: $\alpha = 3/2 > 1$) $\Rightarrow$

$\sum \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ est C.V.

<u>N.B.</u> : $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$ α = le plus haut degré du dénominateur − le plus haut degré du numérateur

$$\alpha = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Scanned by CamScanner

11. $\sum_{n\geq 1} \frac{2n^2+2}{n^3+6n}$

Utilisons le critère du quotient :

$u_n = \frac{2n^2+2}{n^3+6n}$, $v_n = \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n}$ $(\alpha = 3-2 = 1)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n^2+2).n}{n^3+6n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3}{n^3} = 2 > 0$

donc les deux séries $\sum_1^\infty \frac{2n^2+2}{n^3+6n}$ et $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ sont de même nature et comme $\sum \frac{1}{n}$ est divergente (série harmonique) $\Rightarrow \sum \frac{2n^2+2}{n^3+6n}$ est DV..

Scanned by CamScanner