

**TD N° 03 : Les Séries****EXERCICE N° 01**

A. Calculer la somme partielle des séries suivantes :

$$1. \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \dots$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

les séries convergent-elles? si oui donnez leurs sommes.

B. Calculer la somme de la série  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5}{(-2)^n}$

C. En examinant la limite du terme général, montrez que les séries suivantes sont divergentes :

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}(n)$$

$$2. \sum_{n \geq 1} \log(n)$$

$$3. \sum_{n \geq 1} \cos\left(\frac{n+1}{n} \cdot \pi\right)$$

$$4. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

**EXERCICE N° 02 :**

Utilisez le test de comparaison ou un équivalent pour démontrer que :

1. Les séries suivantes sont convergentes

$$a. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[9]{n^3+n^2+1}}{\sqrt{n^4+n^3+2}}$$

$$b. \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

2. Les séries suivantes sont divergentes

$$a. \sum_{n \geq 2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$

$$b. \sum_{n \geq 1} \frac{n+1}{n^{\frac{4}{3}+1}}$$

**EXERCICE N° 03 :**

1. Utilisez le critère de Cauchy pour déterminer la nature des séries suivantes :

$$a. \sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$$

$$b. \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1+n}{n}\right)^{n^2}$$

2. Utiliser le critère de D'Alembert pour déterminer la nature des séries suivantes :

$$a. \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$$

$$b. \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{a^n}, \quad a > 0$$

**EXERCICE N° 04 :** Déterminer la nature des séries numériques suivantes

$$1. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)} \quad 2. \sum_{n \geq 1} e^{\frac{1}{n}} \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + e^{-n}) \quad 4. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad 5. \sum_{n \geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) \quad 7. \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n \log(n)} \quad 8. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n + (-2)^n}{10^n} \quad 9. \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

$$10. \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \quad 11. \sum_{n \geq 1} \frac{2n^2+2}{n^3+6n}$$

**EXERCICE N° 05 :** Etudier la convergence absolue et la semi-convergence des séries suivantes

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \quad 2. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \cdot \tan\frac{1}{n^2} \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot (\sqrt{n^2+1} - n)$$

**EXERCICE N° 06 :** Trouver le rayon et le domaine de convergence des séries entières suivantes

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \quad 2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad 3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n \cdot x^n}{n!} \quad 4. \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$