Université de batna2
Faculté de Technologie
Socle TC Technologie -2éme Année-
Mathématiques 3

Année 2019/2020

Exercices résolus sur les Intégrales doubles et triples

1. Soit $D = [0,1] \times [0,2]$. Calculer
$$\iint_D y \, \frac{e^{2x+y^2}}{1+e^x} \, dx \, dy \, .$$

2. Soit $D = [0,2] \times [0,1]$. Calculer
$$\iint_D (x^3 + 3x^2 y + y^3) \, dx \, dy \, .$$

3. Soit $D = [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Calculer
$$\iint_D \frac{x \sin y}{1+x^2} \, dx \, dy \, .$$

4. Soit $D = [0,\pi] \times [0,1]$. Calculer
$$\iint_D x \sin xy \, dx \, dy \, .$$

5. Soit $D = [0,1] \times [1,2]$. Calculer
$$\iint_D \frac{y}{x^2+y^2} \, dx \, dy \, .$$

6. Soit D l'intérieur du triangle de sommets $A = (0,0)$, $B = (\pi, 0)$ et $C = (\pi, \pi)$. Calculer
$$\iint_D x \cos(x+y) \, dx \, dy \, .$$

7. Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x < \pi\right\}$. Calculer
$$\iint_D y^2 \, e^{xy} \, dx \, dy \, .$$

8. Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, \ y > 1, \ x+y < 3\right\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{dx \, dy}{(x+y)^3} \, .$$

9. Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, \ y > 0, \ x+y < 1\right\}$. Calculer
$$\iint_D 6^x 2^y \, dx \, dy \, .$$

10. Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 4x, \ 1 < xy < 2\right\}$. Calculer
$$\iint_D x^2 y^2 \, dx \, dy \, .$$

11. Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 2x, \ xy < 4, \ x^2+y^2 > 4\right\}$. Calculer
$$\iint_D x^2 y \, dx \, dy \, .$$

12. Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < \sqrt{2}, \ 0 < xy < 1, \ x^2+y^2 > 2\right\}$. Calculer
$$\iint_D xy^2 \, dx \, dy \, .$$

13. Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x, \ x+y-2 < 0\right\}$. Calculer
$$\iint_D \left|(x-y)(x+y-2)\right| \, dx \, dy \, .$$

14. Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y, \ y > x^2\right\}$. Calculer
$$\iint_D x \sin y \, dx \, dy \, .$$

15. Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < xy < 2, \ x^2 < y < 2x^2\right\}$. Calculer
$$\iint_D (x^3 + y^3) \, dx \, dy \, .$$

16. Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, \ 4 < xy < 8, \ 4x - y - 4 < 0\right\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{dx \, dy}{\sqrt{xy}} \, .$$

17. Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1, \ x > \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. Calculer
$$\iint_D (x-y) \, dx \, dy \, .$$

18. Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x(\ln x - 1) + 1 < y < \ln x\right\}$. Calculer
$$\iint_D x \, dx \, dy \, .$$

19. Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x^2+y^2<4\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{\sin(x^2+y^2)}{2+\cos(x^2+y^2)}\,dx\,dy\,.$$

20. Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<(x-2)^2+y^2<4,\ y>0\}$. Calculer
$$\iint_D \cos(x^2+y^2-4x+4)\,dx\,dy\,.$$

21. Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<4,\ y>1\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,.$$

22. Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<36,\ x>3\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,dx\,dy\,.$$

23. Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1,\ x+y>1\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{dx\,dy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,.$$

24. Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2x<0,\ x>1\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{dx\,dy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,.$$

25. Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2x<0\}$. Calculer
$$\iint_D xy(x^2+y^2)\,dx\,dy\,.$$

26. Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x^2+y^2<4,\ 0<y<x\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{y^2\cos(x^2+y^2)}{x^2}\,dx\,dy\,.$$

27. Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 16\,x^2+9y^2<144,\ 0<y<x\}$. Calculer
$$\iint_D x\,dx\,dy\,.$$

28. Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 9x^2+4y^2<36,\ x>0,\ y>0\}$. Calculer
$$\iint_D x^2y^4\,dx\,dy\,.$$

29. Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4(x-1)^2+9(y-1)^2<36,\ y>1,\ x-y>0\}$. Calculer
$$\iint_D xy\,dx\,dy\,.$$

30. Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 9(x-2)^2+25\,(y+1)^2<225,\ y<x-3,\ y>-x+1\}$. Calculer
$$\iint_D (x-2)(y+1)^2\,dx\,dy\,.$$

31. Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<3\sqrt{x^2+y^2}-3x,\ x+y>0\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

32. Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<2\big(\sqrt{x^2+y^2}+x\big)\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt[4]{\left(x^2+y^2\right)^3}}\,.$$

4.33 Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 3x^2+y^2-2y<2,\ 0<y-1<x\}$. Calculer
$$\iint_D x(y-1)^2\,dx\,dy\,.$$

34. Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<\frac{1}{2x}<y<\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\}$. Calculer
$$\iint_D (x^2+4y^2)\,dx\,dy\,.$$

35. Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1,\ 0<y<x\}$. Calculer
$$\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{Arctg}\,\frac{y}{x}\,dx\,dy\,.$$

36. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1,\ 0 < y < x\}$. Calculer

$$\iint_D \left(x^2 + \frac{y^2}{9}\right) \sin\left(2 \operatorname{Arctg} \frac{y}{3x}\right) dx\, dy\,.$$

37. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \sqrt{2},\ 0 < y < \sqrt{\frac{2}{3}}\}$. Calculer

$$\iint_D \frac{dx\, dy}{\sqrt{\left(\frac{1}{3} + x^2 + y^2\right)^3}}\,.$$

38. Soient $r > 0$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - rx < 0\}$. Calculer

$$\iint_D \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy\,.$$

39. 1) Vérifier que pour tout $r > 0$:

$$\begin{aligned} &\iint_{B(\mathbf{0},r)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \\ &\leq 4\left(\int_0^r e^{-t^2}\, dt\right)^2 \\ &\leq \iint_{B(\mathbf{0},2r)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy\,. \end{aligned}$$

2) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

40. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < x + y < 1,\ x > 0,\ y > 0\}$. En effectuant le changement de variables

$$x = \frac{u+v}{2} \text{ et } y = \frac{u-v}{2}\,,$$

calculer

$$\iint_D e^{\left(\frac{x-y}{x+y}\right)}\, dx\, dy\,.$$

41. Soit $D =]0,1[\times]0,1[$. En effectuant le changement de variables

$$x = u^2 \text{ et } y = \frac{v}{u}\,,$$

calculer

$$\iint_D \frac{dx\, dy}{(1+x)(1+xy^2)}\,.$$

42. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y < 2x,\ x < y^2 < 2x\}$. En effectuant le changement de variables

$$u = \frac{x}{y} \text{ et } v = \frac{y^2}{x}\,,$$

calculer

$$\iint_D \frac{y}{x}\, dx\, dy\,.$$

43. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + y^2 < 1,\ y > 0\}$. En effectuant le changement de variables

$$u = x + \frac{y}{2} \text{ et } v = \frac{\sqrt{3}}{2} y\,,$$

calculer

$$\iint_D e^{x^2+xy+y^2}\, dx\, dy\,.$$

44. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - 1 < y^2 < x,\ 0 < y < 2 - x\}$. En effectuant le changement de variables

$$u = \frac{y}{2-x} \text{ et } v = y^2 - x\,,$$

calculer

$$\iint_D \frac{y^2(2 + 2y^2 - x)}{(2-x)^4}\, dx\, dy\,.$$

45. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \sqrt{2}\, y < x,\ 1 < x^2 - y^2 < 4\}$. En effectuant le changement de variables

$$u = x^2 - y^2 \text{ et } v = \frac{y}{x}\,,$$

calculer

$$\iint_D \frac{y}{x^3} \sin \pi\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx\, dy\,.$$

46. En effectuant le changement de variables

$$x = \mu \text{ et } y = \mu \operatorname{tg} \theta\,,$$

calculer

$$\lim_{t \to 0+} \int_t^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\, dy\right) dx\,.$$

Calculer

47. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} (1+y^6)\,dy\,.$

48. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{x^2}^{1} xy\,e^{y^3}\,dy\,.$

49. $\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{(4-y^2)^3}\,dy\,.$

50. $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dx\,.$

51. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dx\,.$

52. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2}\,dx\,.$

53. $\alpha > 0$.

$$\int_0^{2\alpha} dx \int_0^{\sqrt{2\alpha x-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,.$$

54.

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^x \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,dy + \int_{\sqrt{2}}^{2} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,dy\,.$$

Calculer l'aire de

55. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$ $y^2 - 6x < 0,\ x - y < 12,\ x^2+y^2 > 16\}$.

56. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$ $x < 0,\ y^2 < x^4(x+4)\}$.

57. Soit $r > 0$. Calculer l'aire du domaine D délimité par la ***cardioïde*** $\rho(\theta) = 2r(1+\cos\theta)$.

58. Soit $a > 0$. Calculer l'aire du domaine D délimité par la ***lemniscate*** $\rho|\theta| = a\sqrt{|\cos 2\theta|}$.

59. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 4\}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue. Calculer

$$\iint_D \frac{2f(x)+5f(y)}{f(x)+f(y)}\,dx\,dy\,.$$

60. Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné et $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et bornées. Montrer que

$$\left(\iint_D fg(x,y)\,dx\,dy\right)^2 = \iint_D f^2(x,y)\,dx\,dy \iint_D g^2(x,y)\,dx\,dy$$

si et seulement si f et g sont linéairement dépendantes.

61. Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné et $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et bornées. Montrer que pour tout couple de nombres réels $p, q > 1$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a

$$\iint_D |fg|(x,y)\,dx\,dy \leq \sqrt[p]{\iint_D |f|^p(x,y)\,dx\,dy} \times \sqrt[q]{\iint_D |g|^q(x,y)\,dx\,dy}\,.$$

Cette relation est appelée l'***inégalité de Hölder***. Lorsque $p = q = 2$, il est d'usage de l'appeler l'***inégalité de Cauchy-Schwarz***.

62. Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné et $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et bornées. Montrer que pour tout $p \in [1, +\infty[$:

$$\sqrt[p]{\iint_D |f+g|^p(x,y)\,dx\,dy} \leq \sqrt[p]{\iint_D |f|^p(x,y)\,dx\,dy} + \sqrt[p]{\iint_D |g|^p(x,y)\,dx\,dy}\,.$$

Cette relation est appelée l'***inégalité de Minkowski***.

63. Soient $D = [-1,1] \times [-1,1]$ et $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et paire. Montrer que

$$\iint_D f(x-y)\,dx\,dy = 2\int_0^2 (2-t)f(t)\,dt\,.$$

64. Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x,y) = \int_0^x dr \int_0^y f(r,s)\,ds\,.$$

Vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = f(x,y)\,.$$

Calculer

65. $$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}\,dx\,dy\,.$$

66. $$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)}\,.$$

67. $$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+x^4)(1+y^4)}\,.$$

68. $$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-x^2}}{1+y^2}\,dx\,dy\,.$$

69. $$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\,dx\,dy\,.$$

70.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1+y^2}{(1+y^4)\Big(1+\left(1+y^2\right)^2 x^2\Big)}\,dx\,dy.$$

71. $$\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^2}$$
où D est l'intérieur du tétraède de sommets $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$.

72. $$\iiint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$
où D est l'intérieur du tétraède de sommets $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ et $(0,0,1)$.

73. Soit $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2+y^2+z^2 < 4\big\}$. Calculer

$$\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,.$$

74. Soit $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1\big\}$. Calculer

$$\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}}\,.$$

75. Soit $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 1,\ x^2+y^2+z^2 < 4,\ z > 0\big\}$. Calculer

$$\iiint_D z\,dx\,dy\,dz\,.$$

76. Soit $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 4 - x^2 - y^2\big\}$. Calculer

$$\iiint_D z\,dx\,dy\,dz\,.$$

77. Soit $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z < 2,\ x^2+y^2 < 1,\ z > 0\big\}$. Calculer

$$\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz\,.$$

78. Soit $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < z^2,\ 0 < z < 3\big\}$. Calculer

$$\iiint_D z(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz\,.$$

79. Soit $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 2z,\ x^2+y^2+z^2 < 3\big\}$. Calculer

$$\iiint_D (x+y+z)^2\,dx\,dy\,dz\,.$$

80. Soit $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y > 0,\ 2 < x^2+y^2 < 2\sqrt{2}(x+y),\ 0 < z < x+y\big\}$. Calculer

$$\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2}\,.$$