Université de batna2
Faculté de Technologie
Socle TC Technologie -2éme Année-
Année 2019/2020
Mathématiques 3 Analyse

Série d'exercices - Intégrales doubles

EXERCICE 1 : Représenter graphiquement chacun des domaines suivants puis intervertir l'ordre d'integration dans $\iint_{D_i} f(x,y)dxdy$ avec $1 \leq i \leq 4$, où f est une fonction intégrable sur D_i.
1) $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 \leq y \leq 3,\ 0 \leq x \leq 2y\}$;
2) D_2 est le domaine limité par les courbes : $y = 1 - 2x,\ y = -1,\ y = -1 - 2x,\ y = 1$;
3) D_3est le domaine limité par les courbes : $y = \cos x + 1,\ y = \sin x,\ x = -\dfrac{\pi}{2},\ x = \dfrac{\pi}{2}$;
4) D_4 est le domaine limité par les courbes : $y = -1,\ x = 1,\ y^2 = 2x + 1,\ xy + y + x = 1$.

EXERCICE 2 : Calculer les intégrales doubles suivantes par le théoréme de Fubini:
1) $\iint_{D_1} y \sin x dxdy$ / D_1 est l'intérieur du rectangle de sommets $O,\ A(\pi, 0),\ B(0,1), D(\pi, 1)$.
2) $\iint_{D_2} (x+2y)dxdy$ / D_2 est l'intérieur du triangle de sommets $A(1,0),\ B(0,1),\ C(0,-1)$.
3) $\iint_{D_3} y\ dxdy$ / D_3 est l'intérieur du trapèze dont la base est le segment de l'axe des x dont les abscisses sont comprises entre -1 et 1 et dont les trois autres côtés sont situés dans le demi-plan des y positifs et de longueur 1.

EXERCICE 3 : Calculer les intégrales doubles suivantes par le théoréme de Fubini:
1) $\iint_{D_1} (x-y)^2\, dxdy$ / $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 1 \ et \ \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} \geq 1\}$.
2) $\iint_{D_2} xy\ dxdy$ / $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ xy + x + y \leq 1\}$.
3) $\iint_{D_3} x^2 y dxdy$ / D_3 est l'ensemble des points du plan limité par les courbes d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ et $y = -4x + 5$.

EXERCICE 4 : Utiliser un changement de variables adéquat pour calculer les intégrales doubles suivantes:
1) $\iint_{D_1} (2x - y)\, dxdy,$ / $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 < y < x\}$.
2) $\iint_{D_2} \sqrt{x^2 + y^2} dxdy,$ / $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$.
3) $\iint_{D_3} (x^2 + y^2)dxdy$ / D_3 est l'intérieur de de l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

EXERCICE 5 : Calculer les aires des domaines suivants:
1) $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 \leq y \leq 2x^2,\ 1 \leq xy \leq 2\}$.
2) $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x - y| \leq 1,\ |x + y| \leq 1\}$.
3) $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ -2 \leq x \leq \frac{1}{4}y^2 + 1,\ -2 \leq y \leq -\frac{1}{4}x^2 + 3\}$.

EXERCICE 6 : On pose

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \ y \geq 1,\ 3y - 2x \leq 1 \text{ et } 4(x-1)^2 + 9(y-1)^2 \leq 36\right\}.$$

1) Détreminer Δ le transformé de D par le changement de variables

$$\begin{cases} u = \dfrac{x-1}{3}, \\ v = \dfrac{y-1}{2}. \end{cases}$$

2) Représenter Δ grapphiquement.
3) Calculer

$$\iint_D (x-1)(y-1)\ dx\ dy.$$