Université de batna2
Faculté de Technologie
Socle TC Technologie -2éme Année-
Mathématiques 3 Analyse

Année 2019/2020

Intégrales triples

EXERCICE 1 : Dans chacun des cas suivants, représenter le domaine Ω_i, puis exprimer $\iiint\limits_{\Omega_i} f(x,y,z)dxdydz$ sous forme de trois intégrales simples succéssives (sans utiliser de changement de variables) avec f une fonction intégrable sur Ω_i:

1) Ω_1 est le domaine limité par les plans d'équation $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,$ $x + y + z = 1$
2) Ω_2 est le domaine limité par les plans d'équation $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, et la sphère de centre O et de rayon 1, dont les points ont des coordonnées positives;
3) Ω_3 est le domaine limité par le cylindre élliptique $x^2 + z^2 = 4$ et les plans $y = 0,\ y = 6$.

EXERCICE 2 : Calculer les intégrales triples suivantes par le théoréme de Fubini:

1) $\iiint\limits_{\Omega_1} e^x\ dxdydz\ \ /\ \Omega_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ /\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y,\ 0 \le z \le x + y\right\}.$

2) $\iiint\limits_{\Omega_2} e^{x+y+z}\ dxdydz\ /\ \Omega_2$ est le domaine limité par les plans d'équation $x = 0,$ $y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 1.$

3) $\iiint\limits_{\Omega_3} x^2y\ dxdydz\ /\ \Omega_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ /\ 0 \le y \le 1 - x^2,\ |x + y + z| \le 1\right\}.$

4) $\iiint\limits_{\Omega_4} (x{+}y{+}z)\ dxdydz\ /\ \Omega_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ /\ 0 \le z \le x^2 + y^2,\ 0 \le y \le x \le 1\right\}.$

EXERCICE 3 : En utilisant un changement de variables en coordonnées cylindriques adéquat, calculer:

1) $\iiint\limits_{\Omega_1} |xyz|\ dxdydz\ /\ \ \Omega_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ /\ x^2 + y^2 \le z^2,\ 0 \le z \le 1\right\}.$

2) $\iiint\limits_{\Omega_2} x\ dxdydz\ /\ \Omega_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ /\ x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ x^2 + z^2 \le x\right\}.$

3) Le volume de la partie de la sphère de centre O et de rayon R, comprise entre les plans d'équation $z = h_1$ et $z = h_2$ $(R \ge h_1 > h_2 \ge -R)$.

EXERCICE 4 : En utilisant un changement de variables en coordonnées sphériques adéquat, calculer :

1) $\iiint\limits_{\Omega_1} \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}\ dxdydz\ \ /\ \ \ \Omega_1$ est la sphère de centre O et de rayon R.

2) $\displaystyle\iiint_{\Omega_2} x \, dxdydz \;/\; \Omega_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x^2+y^2+z^2 \leq 4,\; x^2+z^2 \leq x\right\}.$

3) Le volume du secteur sphérique, limité par la sphère de centre O et de rayon R et le demi-cône supérieur de sommet O et d'angle 2α.

EXERCICE 5 (Suplémentaire): Calculer les volumes des parties suivantes:

1) Ω_1 est la partie de l'espace limitée par les plans $z = 0,\; z = y$ et le cylindre parabolique $y = 1 - x^2$.

2) Ω_2 est la partie de l'espace se trouvant sous le plan $z = x + 2y$ et au dessus de la région du plan xoy bornée par les courbes $y = x^2,\; y = 0$ et $x = 1$.

3) Ω_3 est le cône d'équation $x^2 + y^2 = \lambda z^2$ (avec $\lambda > 0$).

4) Ω_4 est la partie de l'espace limitée par les plans d'équation $x = 0,\; y = 0,\; z = 0,\; x + y + z = 1$ (en utilisant le changement de variables $x = u(1 - v)$, $y = uv(1 - w)$ et $z = uvw$).