# Etude de 12 séries numériques.

## Exercice 1

Préciser la nature des séries numériques de termes généraux respectifs :

a) $\dfrac{1}{n^2+421}$

b) $\dfrac{1}{\ln(n)}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)(n^2+2)}}$

d) $\dfrac{(\ln(n))^n}{n!}$

e) $\dfrac{1}{n^{2-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}}$

f) $\dfrac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{n^2-\sqrt{n}+\ln(n)}$

g) $\dfrac{\cos n}{n(n+1)}$

h) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n}{1+\sqrt{t}}\,dt$

i) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t^n}{1+\sqrt{t}}\,dt$

j) $\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt{n^2-1}$

k) $\dfrac{n!}{n^n}$

l) $\sin(n)$

# Solution.

## 1°/ Première série.

$u_n = \dfrac{1}{n^2+421}$.

La série numérique $u_n$ est majorée par la série convergente $\dfrac{1}{n^2}$, donc elle est convergente.

La série numérique de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2+421}$ est convergente.

## 2°/ Deuxième série.

$u_n = \frac{1}{ln(n)}$.

Pour $n \geq 1$, $ln(n) \leq n \Rightarrow \frac{1}{ln(n)} \geq \frac{1}{n}$.

La série numérique $u_n$ est minorée par la série divergente $\frac{1}{n}$, donc elle est divergente.

| La série numérique de terme général $u_n = \frac{1}{ln(n)}$ est divergente. |
|---|

## 3°/ Troisième série.

$u_n = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n^2+2)}}$.

Lorsque $n$ tend vers l'infini, $n\,u_n$ est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et tend vers 0.

Donc la série numérique de terme général $u_n$ est convergente.

| La série numérique de terme général $u_n = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n^2+2)}}$ est convergente. |
|---|

## 4°/ Quatrième série.

$u_n = \frac{(ln(n))^n}{n!}$.

Lorsque $n$ tend vers l'infini, $n!$ est équivalent à $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ (formule de Stirling).

$\frac{(ln(n))^n}{n!}$ est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\left(\frac{e\,ln(n)}{n}\right)^n$,

$n\,u_n$ est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{(e\,ln(n))^n}{n^{n-\frac{1}{2}}}$.

La puissance l'emporte sur le logarithme, donc $n\,u_n$ tend vers 0 et la série de terme général $u_n$ est convergente.

## 5°/ Cinquième série.

$u_n = \dfrac{1}{n^{2 - cos\left(\frac{1}{n}\right)}}$.

Lorsque $n$ tend vers l'infini, $\frac{1}{n}$ tend vers 0, $cos\left(\frac{1}{n}\right)$ est équivalent à $1 - \frac{1}{2\,n^2}$.

$2 - cos\left(\frac{1}{n}\right)$ est équivalent à $1 + \frac{1}{2\,n^2}$.

$n\,u_n$ est équivalent à $n^{-\frac{1}{2n^2}} = e^{-\frac{ln(n)}{2n^2}}$

La puissance l'emporte sur le logarithme, donc $-\dfrac{ln(n)}{2\,n^2}$ tend vers 0 et $n\,u_n$ tend vers 1.

$u_n$ est équivalent à $\frac{1}{n}$, série harmonique, divergente.
Donc la série numérique de terme général $u_n$ est divergente.

| La série numérique de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^{2 - cos\left(\frac{1}{n}\right)}}$ est divergente. |
|---|

## 6°/ Sixième série.

$u_n = \dfrac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{n^2 - \sqrt{n} + ln(n)}$.

Lorsque $n$ tend vers l'infini, $\dfrac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{n^2 - \sqrt{n} + ln(n)}$ est équivalent à $\frac{1}{n}$, série harmonique, divergente.
Donc la série numérique de terme général $u_n$ est divergente.

| La série numérique de terme général $u_n = \dfrac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{n^2 - \sqrt{n} + ln(n)}$ est divergente. |
|---|

## 7°/ Septième série.

$u_n = \dfrac{\cos n}{n(n+1)}$.

Lorsque $n$ tend vers l'infini, $\left|\dfrac{\cos n}{n(n+1)}\right| \leq \dfrac{1}{n(n+1)} < \dfrac{1}{n^2}$.

La série numérique $u_n$ est majorée en module par la série convergente $\dfrac{1}{n^2}$, donc elle est convergente.

$$\boxed{\text{La série numérique de terme général } u_n = \dfrac{\cos n}{n(n+1)} \text{ est convergente.}}$$

## 8°/ Huitième série.

$u_n = \sqrt[3]{n^3+2n} - \sqrt{n^2-1}$.

Lorsque $n$ tend vers l'infini, $(n^3 + 2n)^{\frac{1}{3}} = n\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ est équivalent à $n\left(1 + \dfrac{2}{3n^2}\right)$,

$\sqrt{n^2-1} = (n^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = n\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ est équivalent à $n\left(1 - \dfrac{1}{2n^2}\right)$,

$u_n = \sqrt[3]{n^3+2n} - \sqrt{n^2-1}$ est équivalent à $n\left(1 + \dfrac{2}{3n^2} - 1 + \dfrac{1}{2n^2}\right) = \dfrac{7}{6n}$.

Comme la série de terme général $\dfrac{7}{6n}$ est divergente (série harmonique), la série de terme général $u_n$ est divergente.

$$\boxed{\text{La série numérique de terme général } u_n = \sqrt[3]{n^3+2n} - \sqrt{n^2-1} \text{ est divergente.}}$$

## 9°/ Neuvième série.

$u_n = \frac{n!}{n^n}$.

Lorsque $n$ tend vers l'infini, $n$ ! est équivalent à $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ (formule de Stirling).

$\frac{n!}{n^n}$ est équivalent à $\sqrt{2\pi n}\, e^{-n}$,

$n\,u_n$ est équivalent à $\sqrt{2\pi}\; n^{\frac{3}{2}} e^{-n}$.

L'exponentielle l'emporte sur la puissance, donc $n\,u_n$ tend vers 0 et la série de terme général $u_n$ est convergente.

## 10°/ Dixième série.

$u_n = \sin(n)$.

Soit $r$ un nombre réel compris entre – 1 et 1.
$r$ est un *point d'accumulation* (i.e. *valeur d'adhérence*) de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Ce qui veut dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver des entiers $n$, aussi grands qu'on veut, tels que $|\sin(n) - r| < \varepsilon$.

Il en résulte que $u_n$ ne tend pas vers 0 : donc la série de terme général $u_n$ n'est pas convergente.

$$\boxed{\text{La série numérique de terme général } u_n = \sin(n) \text{ est divergente.}}$$

# Séries numériques

## Exercice 1. Etude de 8 séries numériques.

Etudier les séries numériques suivantes:

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{k=n} k}\right)$ ;

b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{9}{(3n+1)(3n+4)}$

c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}\frac{2n-1}{n\left(n^2-4\right)}$

d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}$

e) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{n^2+n+1}$

f) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}(-1)^n \ln\frac{n+1}{n-1}$

g) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} e^{-n}$

h) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^n}{n!}$

## Solution.

### 1°/ Première série.

Soit $u_n = \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{k=n} k}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_k$.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $u_n = \dfrac{2}{n(n+1)} = 2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$,

$$S_n = 2\left(1-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

Lorsque $n$ augmente indéfiniment, $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0 et $S_n$ tend vers 2.
Donc la série de terme général $u_n$ est convergente et sa somme est 2.

$$\sum_{n \geqslant 1} \left( \frac{1}{\sum_{k=1}^{k=n} k} \right) = 2.$$

## 2°/ Deuxième série.

Décomposons $\frac{9}{(3n+1)(3n+4)}$ en éléments simples :

$$u_n = \frac{9}{(3n+1)(3n+4)} = 3\left( \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4} \right)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k = 3\left( \frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + 3\left( \frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right) + \ldots + 3\left( \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4} \right) = 3\left( \frac{1}{4} - \frac{1}{3n+4} \right).$$

Lorsque $n$ augmente indéfiniment, $\frac{1}{3n+4}$ tend vers 0 et $S_n$ tend vers $\frac{3}{4}$.
Donc la série de terme général $u_n$ est convergente et sa somme est $\frac{3}{4}$.

$$\boxed{\sum_{n \geqslant 1} \frac{9}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{3}{4}.}$$

## 3°/ Troisième série.

$$\sum_{n \geqslant 3} \frac{2n-1}{n(n^2-4)}.$$

Décomposons $\frac{2n-1}{n(n^2-4)}$ en éléments simples :

$$u_n = \frac{2n-1}{n(n^2-4)} = \left( \frac{3}{8} \times \frac{1}{n-2} - \frac{5}{8} \times \frac{1}{n+2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{8}\left( \frac{3}{n-2} + \frac{2}{n} - \frac{5}{n+2} \right)$$

$$u_{4k-1} + u_{4k+1} = \frac{1}{8}\left( \frac{3}{4k-3} + \frac{2}{4k-1} - \frac{5}{4k+1} \right) + \frac{1}{8}\left( \frac{3}{4k-1} + \frac{2}{4k+1} - \frac{5}{4k+3} \right)$$

$$= \frac{1}{8}\left( \frac{3}{4k-3} + \frac{5}{4k-1} - \frac{3}{4k+1} - \frac{5}{4k+3} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} (u_{4k-1} + u_{4k+1}) = \frac{3}{8}\sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k+1} \right) + \frac{5}{8}\sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k+3} \right)$$

$$= \frac{3}{8}\left( 1 - \frac{1}{4n+1} \right) + \frac{5}{8}\left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3} \right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\left( \frac{3}{4n+1} + \frac{5}{4n+3} \right)$$

$$u_{4k} + u_{4k+2} = \frac{1}{8}\left( \frac{3}{4k-2} + \frac{2}{4k} - \frac{5}{4k+2} \right) + \frac{1}{8}\left( \frac{3}{4k} + \frac{2}{4k+2} - \frac{5}{4k+4} \right)$$

$$= \frac{1}{8}\left( \frac{3}{4k-2} + \frac{5}{4k} - \frac{3}{4k+2} - \frac{5}{4k+4} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} (u_{4k} + u_{4k+2}) = \frac{3}{8}\sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k+2} \right) + \frac{5}{8}\sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{1}{4k} - \frac{1}{4k+4} \right)$$

$$= \frac{3}{8}\left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2} \right) + \frac{5}{8}\left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4n+4} \right) = \frac{11}{32} - \frac{1}{8}\left( \frac{3}{4n+2} + \frac{5}{4n+4} \right)$$

Posons :

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^{k=n} (u_{4k-1} + u_{4k} + u_{4k+1} + u_{4k+2})$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{11}{32} - \frac{1}{8}\left( \frac{3}{4n+1} + \frac{3}{4n+2} + \frac{5}{4n+3} + \frac{5}{4n+4} \right)$$

$$= \frac{19}{96} - \frac{1}{8}\left( \frac{3}{4n+1} + \frac{3}{4n+2} + \frac{5}{4n+3} + \frac{5}{4n+4} \right)$$

Lorsque $n$ augmente indéfiniment, $-\frac{1}{8}\left( \frac{3}{4n+1} + \frac{3}{4n+2} + \frac{5}{4n+3} + \frac{5}{4n+4} \right)$ tend vers 0 et $\Sigma_n$ tend vers $\frac{19}{96}$.

Posons $S_n = \sum_{k=3}^{k=n} u_k$ et soit $m$ la partie entière de $\frac{n+1}{4}$.

Comme les $u_k$ sont positifs pour $k \geq 3$, $S_n$ est compris entre $\Sigma_m$ et $\Sigma_{m+1}$ : $\Sigma_m \leq S_n < \Sigma_{m+1}$.

Lorsque $n$ augmente indéfiniment, $m$ tend vers l'infini, $\Sigma_m$ tend vers $\frac{19}{96}$, $\Sigma_{m+1}$ tend vers $\frac{19}{96}$, donc $S_n$ tend vers $\frac{19}{96}$ (théorème des gendarmes).

Donc la série de terme général $u_n$ , $n \geq 3$, est convergente et sa somme est $\frac{19}{96}$.

## 4°/ Quatrième série.

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right) = \sin\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sin\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1} - \sin\frac{1}{n+1}\cos\frac{1}{n}.$$

$$u_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)} = \tan\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{n+1}.$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k = \left(\tan 1 - \tan\frac{1}{2}\right) + \left(\tan\frac{1}{2} - \tan\frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\tan\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{n+1}\right) = \tan 1 - \tan\frac{1}{n+1}$$

Lorsque $n$ augmente indéfiniment, $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0.

Puisque la fonction tangente est continue en 0, $\tan\frac{1}{n+1}$ tend vers $\tan 0 = 0$, et $S_n$ tend vers $\tan 1$.

Donc la série de terme général $u_n$ est convergente et sa somme est $\tan 1$.

## 5°/ Cinquième série.

$$\sum_{n \geqslant 1} \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{n^2+n+1}.$$

De la formule $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$, nous déduisons, avec $a = \mathrm{Arctan}\,x$ et $b = \mathrm{Arctan}\,y$, la formule :

$$\mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arctan}\,y = \mathrm{Arctan}\,\frac{x+y}{1-xy}$$

Pour $x = n+1$ et $y = -n$, cette formule devient :

$$\mathrm{Arctan}\,(n+1) - \mathrm{Arctan}\,n = \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{n^2+n+1}.$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k = (\mathit{Arctan}\,2 - \mathit{Arctan}\,1) + (\mathit{Arctan}\,3 - \mathit{Arctan}\,2) + ... + (\mathit{Arctan}\,(n+1) - \mathit{Arctan}\,n)$$

$$= \mathit{Arctan}\,(n+1) - \mathit{Arctan}\,1 = \mathit{Arctan}\,(n+1) - \frac{\pi}{4}.$$

Lorsque $n$ augmente indéfiniment, $\mathit{Arctan}\,(n+1)$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ et $S_n$ tend vers $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

## 6°/ Sixième série.

$$\sum_{n \geqslant 2} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n-1}.$$

$u_n = (-1)^n \ln \dfrac{n+1}{n-1} = (-1)^n (\ln(n+1) - \ln(n-1))$

Soit $P_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_{2k} = \ln(2n+1)$

Soit $I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_{2k+1} = -\ln(2n+2) + \ln 2$

Soit $m$ la partie entière de $\frac{n}{2}$.

Lorsque $n$ est pair ($n = 2m$), $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_k$ est égal à $P_m + I_{m-1}$ :

$$S_n = \ln(2m+1) - \ln(2m) + \ln 2 = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Lorsque $n$ est impair ($n = 2m+1$), $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_k$ est égal à $P_m + I_m$ :

$$S_n = \ln(2m+1) - \ln(2m+2) + \ln 2 = \ln 2 + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Que $n$ soit pair ou impair, on a toujours :

$$\ln 2 + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Lorsque $n$ augmente indéfiniment, $\frac{1}{n}$ tend vers 0, $1 + \frac{1}{n}$ tend vers 1, $1 - \frac{1}{n}$ tend vers 1.

Comme la fonction logarithme neperien est continue en 1, $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ tend vers $\ln 1 = 0$, $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

tend vers $ln\, 1 = 0$.

$ln\, 2 + ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ tend vers $ln\, 2$, $ln\, 2 + ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ tend vers $ln\, 2$, donc $S_n$ tend vers $ln\, 2$ (théorème des gendarmes).

Donc la série de terme général $u_n$ est convergente et sa somme est $ln\, 2$.

$$\boxed{\sum_{n \geqslant 2} (-1)^n \, ln \frac{n+1}{n-1} = ln\, 2.}$$

## 7°/ Septième série.

$$\sum_{n \geqslant 0} e^{-n}$$

C'est une série géométrique de premier terme 1 et de raison $e^{-1} < 1$.

Elle est donc convergente et sa somme est $\frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{e}{e-1}$.

$$\boxed{\sum_{n \geqslant 0} e^{-n} = \frac{e}{e-1}.}$$

## 8°/ Huitième série.

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{n^n}{n!}$$

$u_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n}{n} \times \frac{n}{n-1} \times \ldots \times \frac{n}{2} \times \frac{n}{1}$.

Tous les termes du produit sont supérieurs ou égaux à 1 : le produit $u_n$ est donc supérieur ou égal à 1 et la série de terme général $u_n = \frac{n^n}{n!}$ est divergente parce que ce terme général ne tend pas vers 0.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n \geqslant 1} \frac{n^n}{n!} \text{ est divergente.}}$$

# séries numériques.

## Exercice 1. Etude de 7 séries numériques.

Etudier la nature des séries numériques de termes généraux respectifs :

a) $\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{n\,ln(n)}$ b) $\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n^2}$ $(x \in \mathbb{R})$

c) $cos\,(\pi\sqrt{n^2+n+2})$ d) $\frac{1}{n}\,e^{in\theta}$, avec $n \geq 1$.

e) $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{sin(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ f) $\frac{(-1)^n}{(ln(n))^2}$

g) $\frac{(-1)^n}{ln(n)+(-1)^n}$

## Solution.

### 1°/ Première série.

$u_n = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{n\,ln(n)}$.

Lorsque $n$ tend vers l'infini, $\frac{n+1}{2n+1}$ est équivalent à $\frac{1}{2}$, $u_n$ est équivalent à $\frac{1}{2^{n\,ln\,n}} < \frac{1}{2^n}$.

Or la série de terme général $\frac{1}{2^n}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} < 1$, donc convergente.
Donc la série de terme général $\frac{1}{2^{n\,ln\,n}} > 0$, majorée par une série convergente, est convergente, et la série de terme général $u_n$, équivalente à une série convergente, est convergente.

$$\boxed{\text{La série numérique de terme général } u_n = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{n\,ln(n)} \text{ est convergente.}}$$

## 2°/ Deuxième série.

$u_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n^2}$.

$ln\,(u_n) = -\,n^2\,ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$.

Lorsque $n$ tend vers l'infini, $ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ est équivalent à $\frac{x}{n}$, et $ln\,(u_n)$ est équivalent à $-\,n\,x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour que la série de terme général $u_n$ converge, il faut que $u_n$ tende vers 0, donc que son logarithme tende vers moins l'infini : il faut donc que $x$ soit $> 0$. Pour $x \leq 0$, la série diverge.

Lorsque $x > 0$ et lorsque $n$ devient très grand, $u_n$ est équivalent à $e^{-\,n\,x} = (e^{-\,x})^{\,n}$, série géométrique de raison $e^{-\,x} < 1$, donc convergente.

La série de terme général $u_n$ est équivalente à une série convergente : elle converge.

| |
|---|
| La série numérique de terme général $u_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n^2}$ est convergente pour $x > 0$, divergente pour $x \leq 0$. |

## 3°/ Troisième série.

$u_n = cos\,(\pi\sqrt{n^2+n+2})$.

Lorsque $n$ tend vers l'infini, $\sqrt{n^2+n+2}$ est équivalent à $n$, $u_n$ est équivalent à $cos\,(n\,\pi) = (-\,1)^{\,n}$.

$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} (-\,1)^{\,k}$, vaut 1 pour $n$ pair, et $-\,1$ pour $n$ impair, et n'a donc pas de limite.

Donc la série de terme général $(-\,1)^{\,n}$ est divergente, et il en est de même de la série équivalente $u_n$.

| |
|---|
| La série numérique de terme général $u_n = cos\,(\pi\sqrt{n^2+n+2})$ est divergente. |

## 4°/ Quatrième série.

$u_n = \dfrac{(-1)^n}{(ln(n))^2}$.

Il s'agit d'une série alternée.
Le terme général tend vers 0 et la valeur absolue d'un terme est supérieure à la valeur absolue du terme suivant.
Donc la série converge. La série numérique de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(ln(n))^2}$ est convergente.

## 5°/ Cinquième série.

$u_n = \dfrac{(-1)^n}{ln(n)+(-1)^n}$.

$u_{2n} + u_{2n+1} = \dfrac{1}{ln(2n)+1} - \dfrac{1}{ln(2n+1)-1}$

Lorsque $n$ tend vers l'infini,

$\dfrac{1}{ln(2n)+1}$ est équivalent à $\dfrac{1}{ln(2n)}\left(1 - \dfrac{1}{ln(2n)}\right)$,

$ln(2n+1)$ est équivalent à $ln(2n) + ln\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right) \sim ln(2n)\left(1 + \dfrac{1}{2n\, ln(2n)}\right)$

$ln(2n+1) - 1$ est équivalent à $ln(2n)\left(1 - \dfrac{1}{ln(2n)} + \dfrac{1}{2n\, ln(2n)}\right)$

$\dfrac{1}{ln(2n+1)-1}$ est équivalent à $\dfrac{1}{ln(2n)}\left(1 + \dfrac{1}{ln(2n)} + \dfrac{1}{(ln(2n))^2}\right)$

$\dfrac{1}{ln(2n)+1} - \dfrac{1}{ln(2n+1)-1}$ est équivalent à $-\dfrac{1}{(ln(2n))^2}$.

$\dfrac{1}{(ln(2n))^2} > \dfrac{1}{n}$ (la puissance l'emporte sur le logarithme).

Donc la série de terme général $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$, qui est de signe constant, est divergente.

Il en résulte que la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k$ est divergente, donc que la série de terme général $u_n$ est divergente.

| La série numérique de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{ln(n)+(-1)^n}$ est divergente. |
|---|