Université de batna2
Faculté de Technologie
Socle TC Technologie -2éme Année-
Mathématiques 3

Année 2019/2020

**"Les séries numériques"**

**Exercice 1 :** Etudier la nature et donner la somme éventuelle pour chacune des séries numériques suivantes:

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)}\ ;\ \sum_{n\geqslant 1} n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\ ;\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{\cos(n\alpha)}{2^n}\ (\alpha\in\mathbb{R})$$

**Exercice 2**: Etudier la nature des séries suivantes:
1) Par les critères de comparaison ou d'équivalence:

$$\sum_{n\geqslant 0} e^{\sin n};\sum_{n\geqslant 2}\frac{1+\log n}{n\sqrt{n}};\sum_{n\geqslant 0} arc\cos\left(\frac{n^3+1}{n^2+2}\right);\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{2-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}};\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n\sqrt[n]{n^3}};\sum_{n\geqslant 1}\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)\right].$$

2) Par les critères de D'Alembert ou de Cauchy:

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{n}{2^n};\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{n!}{n^n};\ \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n^2}\ ;\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{(\log n)^n}{n!}\ ;\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{3^n}{7^{n-2}}\ ;\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{2^n}{n^2.\sin^{2n}(\alpha)}\ (\alpha\in\mathbb{R})\,.$$

**Exercice 3**: Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, justifier.

1) Si $u_n>0$ et la série $\sum u_n$ converge alors la série $\sum\frac{1}{u_n}$ converge.

2) Si la série $\sum u_n$ converge absolument alors la série $\sum\cos\left(n^{2018}\right)u_n$ converge.

3) Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent alors $\sum(u_n+v_n)$ diverge.

4) Si la série $\sum u_n$ converge absolument alors la série $\sum\frac{u_n^2}{1+u_n^2}$ converge.

5) Si la série $\sum u_n$ converge alors la série $\sum\frac{(-1)^n u_n}{n}$ converge.

**Exercice 4**: Etudier la nature des séries de terme général:

1) $\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}$; 2) $\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right)-1$; 3) $(n-3)\,e^{-(n-3)}$; 4) $\frac{e^{\frac{1}{n!}}-1}{\log n}$; 5) $\frac{n^{\log n}}{(\log n)^n}$;
6) $\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$; 7) $\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$; 8) $\left(\frac{n+1}{n-2}\right)^n-e^3\left(1+\frac{3}{2n}\right)$; 9) $\frac{1}{\sqrt{n}+2^{(-1)^n}.n}$.

**Exercice 5**: Etudier la nature des séries de terme général (convergence absolue et semi-convergence)

1)$\dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}$; 2) $\dfrac{(-1)^n}{3n-\log n}$; 3)$\dfrac{(-1)^n}{n^2+\sin(n^2)}$; 4) $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$; 5) $n^{\frac{(-1)^n}{n}}-1$;
6)$\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n\cdot\dfrac{n}{\log n}}$; 7)$\dfrac{\log\left(n^{\cos n}\right)}{\sqrt{n}}$; 8) $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\cos n$; 9)$\dfrac{(-1)^n\cos n}{\sqrt{n}}$.

**Exercice 6**:Etudier la nature des séries de terme général
1)$\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}$, $(\alpha>0)$; 2) $\left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^{2n}.\beta^n$, $(\beta>0)$; 3)$n^\alpha\sin\left(1+\dfrac{1}{n}\right).\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{n}\right)$, $(\alpha\in\mathbb{R})$.

# T.D N°1 : " Les séries numériques "

**Exercice 1** Etudier la nature et calculer la somme des séries :

1). $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$U_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ C.V d'après Riemann ($\alpha = 3 > 1$)

Donc d'après le critère d'équivalence $\sum U_n$ C.V

•). Calcul de la somme :

On a : $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+1} + \frac{\gamma}{n+2}$

$\sum_{K=1}^{K} U_K$ est une somme partielle puis faire tendre n vers l'infini

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \lim_{n \to 0} n . U_n = \frac{1}{2} \\ \beta = -1 \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad U_n = \frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}$$

$$\sum_{K=1}^{N} U_K = \sum_{K=1}^{N} \left( \frac{1/2}{K} - \frac{1}{K+1} + \frac{\frac{1}{2}}{K+2} \right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{K=1}^{N} \frac{1}{K} - \sum_{K=1}^{N} \frac{1}{K+1} + \frac{1}{2} \sum_{K=1}^{N} \frac{1}{K+2}}$$

$\sum_{n \geq n_0} (U_n + V_n) = \sum_{n \geq n_0} U_n + \sum_{n \geq n_0} V_n$ est correcte que si $\sum_{n \geq n_0} (U_n + V_n)$ CV

possible décomposer la $\sum$ car $U_n$ converge

On change la variable :

On pose : $K+1 = K'$ et $K+2 = K''$

$$\sum_{K=1}^{N} U_K = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^{N} \frac{1}{K} - \sum_{K'=2}^{N+1} \frac{1}{K'} + \frac{1}{2} \sum_{K''=3}^{N+2} \frac{1}{K''}$$

On change $K'$, $K''$ par $K$

$$\sum_{K=1}^{N} U_K = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^{N} \frac{1}{K} - \sum_{K=2}^{N+1} \frac{1}{K} + \frac{1}{2} \sum_{K=3}^{N+2} \frac{1}{K}$$

on garde l'intersection des 3 puis ajouter termes manquants

$$= \frac{1}{2} \left( \cancel{1} + \frac{1}{2} + \cancel{\sum_{K=3}^{N} \frac{1}{K}} \right) - \left( \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\sum_{K=3}^{N} \frac{1}{K}} + \frac{1}{N+1} \right) + \frac{1}{2} \left( \cancel{\sum_{K=3}^{N} \frac{1}{K}} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} \right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{N+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{N+2}$$

donc : $\sum_{n \geq 1} U_n = \lim_{n \to +\infty} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{N+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{N+2} \right)$

$= \frac{1}{4}$

1

2). $\sum_{n\geq 1} n.\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

$U_n = n.\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $n > 1$

$0 < \frac{1}{n} < 1$ alors $n.\sin(\frac{1}{n}) > 0$

$n.\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} 1$

$\lim_{n\to+\infty} n.\sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} n.\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ div (condition nécessaire)

Le terme général ne tend pas vers 0.

3). $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(n\alpha)}{2^n}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

$a^n$ avec $a = \frac{1}{2} \in ]-1,1[$

$\left|\frac{\cos(n\alpha)}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$ Et la S.N $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ CV (série géométrique)

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} \left|\frac{\cos(n\alpha)}{2^n}\right|$ C.V $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{\cos(n\alpha)}{2^n}$ C.V

•). Calculons la somme.

$\left.\begin{array}{l} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{array}$

Donc au lieu de calculer une somme de cosinus on va calculer une somme d'exp

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\cos n\alpha}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0} \frac{e^{in\alpha}+e^{-in\alpha}}{2^n}$$ (somme d'une suite géométrique)

Exercice 2.

1- par les critères d'équivalences ou de comparaison :

1). $\sum_{n\geq 2} e^{\sin(n)}$ ; nous avons $-1 \leq \sin(n) \leq 1$

donc $0 < e^{-1} \leq e^{\sin(n)} \leq e^{1}$

vu que $\sum_{n\geq 2} e^{-1}$ diverge alors par comparaison $\sum_{n\geq 2} e^{\sin(n)}$ diverge

2). $\sum_{n\geq 2} \frac{1+\log(n)}{n\sqrt{n}}$.

$\frac{1+\log(n)}{n\sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\log(n)}{n\sqrt{n}} \geq 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\log(n)}{\log(n)} = 1$

on a : $\frac{\log(n)}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}.\log^{-1}(n)}$ et $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{3/2}.\log^{-1}(n)}$ C.V d'après Bertrand pour $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$

alors par équivalence $\sum_{n\geq 2} U_n$ C.V

3). $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2-\cos(\frac{1}{n})}}$

$$\frac{1}{n^{2-\cos(\frac{1}{n})}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^{1-\cos(\frac{1}{n})}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^{-\frac{1}{2n^2}}}$$

car $\left(1-\cos(\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}\right)$

or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{-\frac{1}{2n^2}}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{2n^2}\cdot\ln(n)} = 1$

Donc $\frac{1}{n^{2-\cos(\frac{1}{n})}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ div d'après Riemann ($\alpha = 1$ donc $\alpha \leq 1$)

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2-\cos(\frac{1}{n})}}$ div (par équivalence).

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$

4). $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt[n]{n^3}}$ ; $\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n^3}} > 0$ ; $\forall n \geq 1$

on a : $\frac{1}{\sqrt[n]{n^3}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{n}}} = \frac{1}{e^{\frac{3}{n}\cdot\ln(n)}} \underset{+\infty}{\sim} 1$ $\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^{\frac{3}{n}\cdot\ln(n)}}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{3}{n}\cdot\ln(n)} = e^0\right)$

Donc : $\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n^3}} \sim \frac{1}{n}$ et $\underbrace{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n} \text{ div}}_{\text{Riemann}} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n^3}}$ div

5). $\sum_{n\geq 1} \left[e-(1+\frac{1}{n})\right]$ div

car $\lim_{n\to+\infty}\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = e-1 \neq 0$ (Condition nécessaire)

5). $\sum_{n\geq 1}\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$ on a : $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\log(1+\frac{1}{n})} \sim e^{n\cdot(\frac{1}{n})} = e$

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$e^{n\cdot\ln(1+\frac{1}{n})} = e^{\left[1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})\right]} = e\cdot e^{\left[-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})\right]} \Rightarrow e - e^{n\cdot\ln(1+\frac{1}{n})} = e - e\cdot e^{\left[-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})\right]}$$

$x = -\frac{1}{2n}$

$e^{-\frac{1}{2n}} = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ alors :

$$e - e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} = e - e\left[1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= e - e + \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$e - e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} = \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$ → DL de notre série

donc $e - e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{2n}$

et $\sum_{n\geq 1} \frac{e}{2n}$ diverge car $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann).

Exo1 (suite) : calcule de la somme :

Au lieu de calculer une somme de cosinus, on calcule une somme d'exponentielle :

$$\frac{\cos(n\alpha)}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{in\alpha} + e^{-in\alpha}}{2^n} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{e^{i\alpha}}{2}\right)^n + \left(\frac{e^{-i\alpha}}{2}\right)^n\right]$$

somme partielle

$\left(\frac{e^{i\alpha}}{2}\right)^n$ et $\left(\frac{e^{-i\alpha}}{2}\right)^n$ sont deux séries géométriques

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{\cos(n\alpha)}{2^n} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{N}\left[\left(\frac{e^{i\alpha}}{2}\right)^n + \left(\frac{e^{-i\alpha}}{2}\right)^n\right]\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1 - \cancel{\left(e^{i\alpha}/2\right)^{N+1}}^{\,0}}{1 - e^{i\alpha}/2} + \frac{1 - \cancel{\left(e^{-i\alpha}/2\right)^{N+1}}^{\,0}}{1 - e^{-i\alpha}/2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - e^{i\alpha}/2} + \frac{1}{1 - e^{-i\alpha}/2}\right)$$

$$\left(\frac{e^{i\alpha}}{2}\right)^n = \left(\frac{\cos\alpha + i\sin(\alpha)}{2}\right)^n = \left(\frac{\cos\alpha}{2} + i\,\frac{\sin(\alpha)}{2}\right)^n$$

si la partie réelle et la partie imaginaire d'un série complexe c.v alors la série converge

puisque $\left(\frac{e^{i\alpha}}{2}\right)^n$ c.v alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^{i\alpha}}{2}\right)^n = 0$ (C.N)

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2 - e^{i\alpha}} + \frac{2}{2 - e^{-i\alpha}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4 - 2e^{-i\alpha} + 4 - 2e^{i\alpha}}{4 - 2e^{-i\alpha} - 2e^{i\alpha} + 1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{8 - 2(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})}{5 - 2(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})}\right) = \frac{4 - 2\cos\alpha}{5 - 4\cos\alpha} \in \mathbb{R}$$

Méthode 2 :

$$\left|\frac{e^{i\alpha}}{2}\right|^{N+1} = \left|\frac{\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)}{2}\right|^{N+1} = \left(\frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}}{2}\right)^{N+1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} \quad \text{et} \quad \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} = 0$$

$\frac{1}{2^n}\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}$ c.v car $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$ donc c.v

alors $\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} = 0$

Exercice: Utiliser le critère de comparaison pour conclure la nature des séries numériques suivantes:

I-a). $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n.5^n}$ ; $U_n = \frac{2^n}{n.5^n} \geq 0 ; \forall n \geq 1$

on a: $\frac{1}{n} < 1$

$U_n = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n < \left(\frac{2}{5}\right)^n = V_n$ et $V_n$ C.V car c'est une série géométrique avec $-1 < \frac{2}{5} < 1$

donc $U_n$ C.V par comparaison

b). $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ ; $U_n = \frac{1}{2\sqrt{n}} > 0 ; \forall n \geq 1$

$\frac{1}{2\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2n}$ et $\underbrace{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n}}_{\text{série de Riemann}}$ div $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ div

ou alors:

$U_n = \frac{1}{2\sqrt{n}}$ ; $V_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = \frac{1}{2} > 0$

alors $U_n$ et $V_n$ sont de même nature et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ div d'après Riemann alors $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ div.

c). $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n)}$ ; $\frac{1}{\ln(n)} > 0 ; \forall n \geq 2$

on a: $\ln(n) < n \Rightarrow \frac{1}{\ln(n)} > \frac{1}{n}$ or: $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n}$ div (d'après Riemann)

alors $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n)}$ div

d). $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right) = \sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

D.L de $\ln(1+\frac{1}{n^2})$ c'est son équiv

posons $U_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) > 0, \forall n \geq 1$. et $V_n = \frac{1}{n^2}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1 > 0$ donc $\sum U_n$ et $\sum V_n$ sont de même nature.

$\sum V_n$ C.V (d'après Riemann) $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} U_n$ C.V

II. Calcul de la somme: Toujours d'abord somme partielle

$\sum_{n\geq} \log \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ on a: $\log \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \log\left[\frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1}\right]$

$= \log\left(\frac{n}{n+1}\right) + \log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

$= \log\left(\frac{n}{n+1}\right) - \log\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$

$$\sum_{n=1}^{N} U_n = \sum_{n=1}^{N} \left[\log \frac{n}{n+1} - \log\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\right]$$
$$= \log\left(\frac{1}{2}\right) - \log \frac{N+1}{N+2}$$

$$\sum_{n\geq 1} U_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \log\left(\frac{1}{2}\right) = -\log(2)$$ alors la série C.V

Exo 2 : (suite)

2 - a). $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^n}$ ; $U_n = \frac{n}{2^n} \geq 0 \quad \forall n \geq 0$

Méthode 1. (d'Alembert)

Calculons $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{2} < 1$$ donc C.V

Méthode 2 (Cauchy).

Calculons $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n}$

$$(U_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{n^{\frac{1}{n}}}{2} = \frac{e^{\frac{\ln(n)}{n}}}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} (U_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2} < 1$$ donc C.V

1 - C). $\sum_{n\geq 0} \arccos\left(\frac{n^3+1}{n^2+1}\right)$, Div car elle est définie que pour

$n=0$ ou $n=1$

ou alors : $\arccos\left(\frac{n^3+1}{n^2+1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \arccos\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\lim_{n\to+\infty} \arccos\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2} \neq 0$

alors div.

2 - b) - $\sum_{n\geq 2} \frac{n!}{n^n}$ ; $U_n = \frac{n!}{n^n} > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{n\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} \sim e^{-\frac{n}{n+1}}$$

$$n\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \underset{+\infty}{\sim} n\left(-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{-n}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{n}{n+1}} = e^{-1}$$

fonction et son équivalent ont la même limite

alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = e^{-1} < 1$ C.V

ou : $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} = e^{-1} < 1$$ C.V.

2) . c) . $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n^2}$ ; $U_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n^2} \geq 0$ $\quad e^{-n\ln(2)}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(\frac{n}{2n+1}\right)} = e^{-n\ln(2)} = 0 < 1$$

d'après la règle de Cauchy $\sum U_n$ Converge.

2 . d) . $\sum_{n\geq 1} \frac{(\log n)^n}{n!}$ , $U_n = \frac{(\log n)^n}{n!} > 0$ , $\forall n \geq 1$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(\log(n+1))^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(\log n)^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n+1)}{\cancel{n+1}}^{\to 0} \cdot \left(\frac{\log(n+1)}{\log(n)}\right)^n = 0 < 1 \text{ donc C.V}$$

Calculons $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\log(n+1)}{\log(n)}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\log(n+1) + \log(n) - \log(n)}{\log n}\right)^n$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\log(n)} + 1\right)^n$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log(n)} + 1\right)} \quad = x \text{ et d'après}(*) \ x\to 0, \ n\to+\infty$$

(*) $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

$$= \lim e^{n\ln\left(\frac{\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} + 1\right)}$$

$$\sim e^{n\cdot\left(\frac{\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)} \sim e^{\left(\frac{1+o(1)}{\ln(n)}\right)} \sim e^{\frac{1}{\ln(n)}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{\ln(n)}} = e^0 = 1$$

e) . $\sum_{n\geq 1} \frac{3^n}{7^{n-2}}$ ; $U_n = \frac{3^n}{7^{n-2}} > 0$ ; $\forall n \geq 1$

$$U_n = \frac{3^n}{7^{n-2}} = \left(\frac{3}{7}\right)^n \cdot 7^2 \Rightarrow \sqrt[n]{U_n} = \frac{3}{7} \cdot 7^{\frac{2}{n}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{7} \cdot 7^{\frac{2}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{7} \cdot e^{\frac{2}{n}\cdot\ln 7} = \frac{3}{7} < 1$$

donc $\sum_{n\geq 1} \frac{3^n}{7^{n-2}}$ conv.

f) .

Exercice 3.

1). fausse, $\sum U_n$ C.V $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{U_n} = \infty \Rightarrow \sum \frac{1}{U_n}$ div (C.N)

ou contre exemple : $\sum U_n = \sum \frac{1}{n^3}$ c.v (Riemann)

mais $\sum n^3$ div.

2). $|\cos(n^{2018})| < 1$ vrai

$|\cos(n^{2018}).U_n| < |U_n|$

or $\sum |U_n|$ C.V (car $U_n$ c.v abs) $\Rightarrow \sum |\cos(n^{2018}).U_n|$ C.V (comparaison

$\Rightarrow \sum \cos(n^{2018}).U_n$ converge.

3). fausse

par contre exemple : i). $U_n = 1 \Rightarrow \sum U_n$ div (C.N)

$V_n = -1 \Rightarrow \sum V_n$ div (C.N)

$\sum (U_n + V_n) = 0$ alors converge.

ii). $\sum U_n$, $-\sum U_n$ teq $\sum U_n$ diverge

$\sum 0 \to$ C.V.

4). vrai

on a : $1 + U_n^2 \geq |U_n|$

$U_n^2 > U_n$ (si $U_n > 1$)
donc pour éviter ça

$\frac{1}{|U_n|} \geq \frac{1}{1+U_n^2} \Rightarrow |U_n| \geq \frac{U_n^2}{1+U_n^2} > 0$

donc $\sum \frac{U_n^2}{1+U_n^2}$ C.V car $\sum U_n$ C.V abs $\Rightarrow \sum U_n$ c.v
(par comparaison).

Exercice 4:

1). $\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1} = U_n$

$U_n = |n| \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} - |n| . \sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$

$= |n| \left[ \left(1+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1+\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \right]$

$\left(1+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\left(1+\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$U_n = n\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - 1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$

$U_n = n\left[\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$

$U_n = 1 + o(\frac{1}{n})$

$U_n \sim 1 = V_n \Rightarrow V_n$ div (C.N) par équivalence $\sum U_n$ div

ou alors multiplier par le conjugué et calculer la limite.

2)- $e^{\frac{1}{\sqrt{2n-1}}} - 1$

on a : $\forall n \geq 1$ ; $2n-1 < 2n$

$\sqrt{2n-1} < \sqrt{2n}$

$\frac{1}{\sqrt{2n-1}} > \frac{1}{\sqrt{2n}}$ d'après Riemann $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge

$\Rightarrow \sum \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$ diverge (critère de comparaison)

$e^{\frac{1}{\sqrt{2n-1}}} - 1 = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2n-1}}}_{} + o(\frac{1}{\sqrt{2n-1}})$ alors $\sum e^{\frac{1}{\sqrt{2n-1}}} - 1$ div (critère d'équivalence)

$\rightarrow$ on peut dire que c'est un équi car on a juste retranché un 1.

3). $U_n = \frac{n-3}{e^{(n-3)}} \geq 0$

$\forall n \geq 3$ : $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n-2}{e^{(n-2)}} \cdot \frac{e^{(n-3)}}{(n-3)}$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = e^{-1} < 1 \Rightarrow U_n$ CV

d'après d'Alembert.

4). $\frac{e^{\frac{1}{n!}} - 1}{\log(n)} > 0$ ; $\frac{e^{\frac{1}{n!}} - 1}{\ln(n)} = \frac{1 + \frac{1}{n!} - 1 + o(\frac{1}{n!})}{\ln(n)}$

$= \frac{\frac{1}{n!} + o(\frac{1}{n!})}{\ln(n)}$

posons : • $U_n = \frac{1}{n! \ln(n)}$, $\forall n > 2$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} \cdot \frac{1}{n+1}$ $\left(\to 1, \to 0\right)$ $= 0 < 1$ donc $\sum U_n$ c.v d'après d'alembert.

• $V_n = \frac{o(\frac{1}{n!})}{\ln(n)} = \frac{1}{n! \ln(n)} \cdot o(1)$ (tirer $\frac{1}{n!}$ en facteur)

$|V_n| = \frac{1}{n! \ln(n)} |o(1)| < \frac{1}{n! \ln(n)} = U_n$ (c.v) $\quad \lim_{n \to +\infty} o(1) = 0$

D'où $\sum V_n$ C.V abs $\Rightarrow \sum V_n$ C.V

D'où : $\sum V_n + U_n = \frac{\frac{1}{n!} + o(\frac{1}{n!})}{\ln(n)}$ c.v.

et $\sum V_n + U_n = \frac{e^{\frac{1}{n!}} - 1}{\ln(n)}$ c.v (par linéarité)

5). $\dfrac{n^{\log(n)}}{(\log(n))^n}$ ; posons $U_n = \dfrac{n^{\log(n)}}{(\log(n))^n}$

$$U_n = \frac{e^{(\log(n))^2}}{e^{n\log(\log(n))}} > 0 \quad \forall n \geq 1$$

$$\sqrt[n]{U_n} = \frac{e^{\frac{\log^2 n}{n}}}{e^{\log(\log(n))}} = 0 < 1 \text{ car } \lim_{n \to +\infty} \frac{\log^2 n}{n} = \lim \left(\frac{\log(n)}{\sqrt{n}}\right)^2 = 0 \text{ (l'hopital)}$$

d'après cauchy $\sum U_n$ C.V.

ou bien : $\sqrt[n]{U_n} = e^{\left[\frac{(\log(n))^2}{n} - \log(\log(n))\right]}$

nous avons $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{U_n} = 0 = e < 1$ donc $\sum U_n$ C.V d'après Cauchy

2e méthode :

changement de variable : $\log(n) = t \Rightarrow n = e^t$

$$\sqrt[n]{U_n} = \frac{n^{\frac{\log(n)}{n}}}{\log(n)} \quad \text{donc } \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{t \to +\infty} \frac{(e^t)^{\frac{t}{e^t}}}{t}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{\frac{e^t}{t^2}}}}{t} = 0 < 1 \text{ donc C.V}$$

6). $\sin(\frac{1}{n}) - \log(1+\frac{1}{n})$

on a : $\sin(\frac{1}{n}) - \log(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n^2}) - (\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}))$

$$= \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

on a : $\sum \frac{1}{2n^2}$ C.V d'après Riemanne

et on a : $n^2 |o(\frac{1}{n^2})| = |o(1)| \to 0$

donc $\sum o(\frac{1}{n^2})$ Cvge abs (Règle de l'ordre donc :

$\sum \sin(\frac{1}{n}) - \log(1+\frac{1}{n})$ Cvge.

7). $\dfrac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$ ; Utilisons la règle de l'ordre $(U_n > 0)$

$n^\alpha . U_n$ ; on pose $\alpha = 2$

$$n^2 . U_n = \frac{n^{n+1}}{\left[n^2(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})\right]^{\frac{n+1}{2}}} \quad \text{et } \lim_{n \to +\infty} n^2 . U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{n^{n+1}}}{\cancel{n^{n+1}} . (2+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2})^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(2+\underbrace{\frac{1}{n}}_{0}+\underbrace{\frac{1}{2n^2}}_{0})^{\frac{n+1}{2}}} = 0$$

d'où $\sum U_n$ C.V (selon la Règle de l'ordre)

Exo 5.

1) $\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ ; $|U_n| = \frac{1}{n!}$ avec d'Alembert :

$\frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! = \frac{1}{n+1}$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = 0 < 1$ donc

$U_n$ C.V abs $\Rightarrow U_n$ C.V.

2) $\frac{(-1)^n}{3n - \log n}$

a). convergence. posons $v_n = \frac{1}{3n - \log n}$ ; on a $U_n > 0$ $\forall n > 1$

et on a $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3n - \log n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n(3 - \frac{\log n}{n})} = 0$

posons $f(x) = 3x - \log x$

$\Rightarrow f'(x) = 3 - \frac{1}{x} > 0$ ; $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\Rightarrow f \nearrow$ alors $\frac{1}{f} \searrow$

Donc $(v_n)_n$ décroissante selon $n$ alors $\Sigma U_n$ est de Leibnitz

$\Rightarrow \Sigma U_n$ converge.

b). convergence abs :

on a : $|U_n| = \frac{1}{3n - \log n}$ ; on a $\forall n \geq 1$ $3n - \log n < 3n$

$\Rightarrow \frac{1}{3n - \log n} \geq \frac{1}{3n}$ ; on a $\Sigma \frac{1}{3n}$ div (Rieman)

$\Rightarrow \Sigma |U_n|$ div (par comparaison)

Donc on a pas la convergence abs alors $\Sigma U_n$ est semi convergente

3). $\frac{(-1)^n}{n^2 + \sin(n^2)} = U_n$ alors $|U_n| = \frac{1}{|n^2 + \sin(n^2)|}$

$|U_n| = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\sin(n^2)}{n^2}\right)} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ $\left(-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\sin(n^2)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}\right)$

$\Sigma \frac{1}{n^2}$ C.V (d'après Rieman) $\Rightarrow \Sigma |U_n|$ C.V (par équivalence)

alors $\Sigma U_n$ C.V.

. 2e méthode :

$$\sqrt[n]{U_n} = \frac{n^{\frac{n+1}{n}}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2n}}} = \frac{n \cdot n^{-\frac{1}{n}}}{(2n^2+n+1)^{\frac{1}{2}} \cdot (2n^2+n+1)^{\frac{1}{2n}}}$$

$$= \lim \frac{n}{(2n^2+n+1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{n^{-\frac{1}{n}}}{(2n^2+n+1)^{\frac{1}{2n}}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(e^{-\frac{1}{n} \ln(n)}) \to 1}{(e^{\frac{1}{2n} \cdot \ln(2n^2+n+1)}) \to 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$$

donc $\Sigma U_n$ converge d'après Cauchy.

8). $\left(\frac{n+1}{n-2}\right)^n - e^3\left(1+\frac{3}{2n}\right)$

$$\left(\frac{n+1}{n-2}\right)^n = \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n}}\right)^n = e^{n\left[\ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(1-\frac{2}{n})\right]}$$

$$\left.\begin{array}{l} \ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) \\ \ln(1-\frac{2}{n}) = -\frac{2}{n} + o(\frac{1}{n}) \end{array}\right\} \Rightarrow e^{n(\ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(1-\frac{2}{n}))} = e^{n(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+o(\frac{1}{n}))} = e^{3+o(1)} = e^3$$

et on a :

$$e^3\left(1+\frac{3}{2n}\right) = e^3 + \frac{3e^3}{2n}$$

alors $U_n = e^3 - e^3 + \frac{3e^3}{2n} = \frac{3e^3}{2n}$ et $\Sigma U_n$ div.

9). on a : $U_n = \frac{1}{\sqrt{n} + (2)^{(-1)^n} \cdot n} > 0 \quad \forall n > 0$

on a : $\frac{1}{2} \leq (2)^{(-1)^n} \leq 2$

$\sqrt{n} + 2^{(-1)^n} \leq \sqrt{n} + 2$

$\sqrt{n} + 2^{(-1)^n} \leq \sqrt{n} + 2n$

$\frac{1}{\sqrt{n} + 2^{(-1)^n} \cdot n} \geq \frac{1}{\sqrt{n} + 2n}$

alors $\frac{1}{\sqrt{n}+2n} \leq \frac{1}{\sqrt{n} + 2^{(-1)^n} \cdot n}$

et $\frac{1}{\sqrt{n}+2n} > \frac{1}{3n}$

puisque $\Sigma \frac{1}{3n}$ div d'après Riemann par comparaison $\Sigma \frac{1}{\sqrt{n}+2n}$ div et par comparaison $\Sigma \frac{1}{\sqrt{n} + 2^{(-1)^n} \cdot n}$ div.

4). $\sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right) = U_n$

$|o(U_n)| < U_n$

on a: $\sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right) = \sin\left(\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)$

$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

Donc : $\sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right) = \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$= \cancel{\sin(\pi n)}^{\to 0}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \underbrace{\cos(\pi n)}_{(-1)^n}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$= (-1)^n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ DL

a). convergence abs

$|U_n| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right| = \underbrace{\frac{\pi}{2n}}_{div} + \underbrace{o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{CV}$ $+o\left(\frac{1}{n}\right)$ car $\left|o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| < \frac{1}{n^2} \leftarrow CV$

$\Rightarrow \sum|U_n|$ div

b). convergence: $\sin(x) = x + o(x^2)$

$U_n = (-1)^n\left(\frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\left(\frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2\right)\right)$

$U_n = (-1)^n\left(\frac{\pi}{2n}\right) + (-1)^n\cdot o\left(\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$U_n = (-1)^n\left(\frac{\pi}{2n}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

on a: $\sum(-1)^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ C.V --- (1) (d'après leibnitz)

car : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2n} = 0$ et $\frac{\pi}{2n} > 0$, la suite $\left(\frac{\pi}{2n}\right)_{n\geq 1} \searrow$

$\sum o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est C.V : $\left|o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| = \frac{1}{n^2}\cdot\left|\varepsilon\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|$

on $\varepsilon\left(\frac{1}{n^2}\right) \to 0$ pour $n\to+\infty$

Donc $\left|o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| < \frac{1}{n^2} \to$ (C.V d'après Rieman)

$\Rightarrow \sum o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ C.V --- (2)

$\left(\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\cdot o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0 \Rightarrow \sum o\left(\frac{1}{n^2}\right)\ C.V\right.$ (l'ache) $\Big)$

Donc $\sum U_n$ C.V (de (1) et (2))

on ne peux pas pose $n = e^t$ car $n \in \mathbb{N}$

5). $n^{\frac{(-1)^n}{n}} - 1 = e^{\frac{(-1)^n\cdot\ln(n)}{n}} - 1$

$(-1)^{2n} = 1$

$= \left(1 + \frac{(-1)^n\ln(n)}{n} + \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right)\right) - 1$

$= \underbrace{\frac{(-1)^n\cdot\ln(n)}{n}}_{\substack{cvg \\ \text{Liebnitz}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln^2(n)}{n^2}}_{\substack{cvg \\ \text{Bertrand}}} + \underbrace{o\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right)}_{\substack{cvg \\ \text{(comparaison + Bertrand)}}}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2\cdot\ln^{-2}(n)}$ $\quad \left|o\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right)\right| < \frac{\ln^2(n)}{n^2} = \frac{1}{n^2\cdot\ln^{-2}(n)}$

donc $\sum U_n$ CV.

b). convergence absolue

on a : $1 - n^{-\frac{1}{n}} \leq \left| n^{\frac{(-1)^n}{n}} - 1 \right| \leq n^{\frac{1}{n}} - 1$

on a : $1 - n^{-\frac{1}{n}} = 1 - e^{-\frac{1}{n}\cdot \ln(n)}$

$$= 1 - \left( 1 + \frac{-1}{n}\ln(n) + \frac{1}{2n^2}\ln^2(n) + o\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{\ln(n)}{n}}_{\substack{\text{div} \\ \text{(Bertrand)}}} + \underbrace{\frac{1}{2n^2\ln^2(n)}}_{\substack{\text{conv} \\ \text{(Bertrand)}}} + \underbrace{o\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right)}_{\text{conv (comp + Bertrand)}}$$

=> $\Sigma |U_n|$ diverge

alors $\Sigma U_n$ est semi-convergente.

6). $\dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n \cdot \frac{n}{\log n}}$

$U_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \cdot \dfrac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\log(n)}}$ alors $U_n = \dfrac{(-1)^n}{n}\left(1 - \dfrac{(-1)^n}{\log(n)} + \dfrac{1}{\log^2 n} + o\left(\dfrac{1}{\log^2 n}\right)\right)$

$$\Rightarrow U_n = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{\text{C.V (Ziebnidz)}} - \underbrace{\frac{1}{n.\log(n)}}_{\substack{\text{div} \\ \text{(Bertrand)}}} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n\log^2 n}}_{\substack{\text{C.V} \\ \text{(Zibnidz)}}} + \underbrace{(-1)^n o\left(\frac{1}{n\log^2 n}\right)}_{\text{C.V}}$$

ou C.V abs (Bertrand)

$\left|(-1)^n \cdot o\left(\frac{1}{n\log^2 n}\right)\right| = \left|o\left(\frac{1}{n.\log^2 n}\right)\right| < \frac{1}{n.\log^2 n}$ → converge d'après Bertrand

par comparaison $\Sigma \left|(-1)^n \cdot o\left(\frac{1}{n.\log^2 n}\right)\right|$ C.V => $\Sigma (-1)^n \cdot o\left(\frac{1}{n.\log^2 n}\right)$ C.V

par linéarité $\Sigma U_n$ diverge (donc $\Sigma |U_n|$ diverge)

7). $U_n = \dfrac{\log(n^{\cos n})}{\sqrt{n}} = \dfrac{\cos n \cdot \log n}{\sqrt{n}}$

$v_n = \dfrac{\log n}{\sqrt{n}}$ et $w_n = \cos n$

$\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$ ; on pose $f(x) = \dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ => $f'(x) = \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{2}\log(x)\right)$

$1 - \frac{1}{2}\log x < 0 \Rightarrow x > e^2$

donc pour $x > e^2$ on a $f(x) \searrow$ donc $(v_n)_n \searrow$ $\forall n \geq 8$.

$|S_{wn}| = |\cos(0) + \cos(1) + \dots + \cos(n)| \leqslant \left|\frac{1}{\sin(\frac{1}{2})}\right| = M$ independant de $n$

et d'après Abel (1) $\sum U_n$ C.V

si $\sum U_n$ div alors $\sum |U_n|$ ne peut pas converger.

· convergence absolue

$|U_n| = \left|\frac{\cos n . \log n}{\sqrt{n}}\right| \geqslant \frac{|\cos n|}{\sqrt{n}}$ car $\ln(n) > 1 \ \forall n \geqslant 3$

$|\cos x| \geqslant \cos^2 x$

on a: $\frac{|\cos(n)|}{\sqrt{n}} = \frac{|1 + \cos^2(\frac{n}{2})|}{2\sqrt{n}}$

car $\left.\begin{array}{l} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \\ 1 = \cos^2 x + \sin^2 x \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$

$V_n = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{n}}}_{\text{Div (Rieman)}} + \underbrace{\frac{\cos^2(\frac{n}{2})}{2\sqrt{n}}}_{\text{CV (ref) Abel}}$ Donc par linéarité $W_n$ div et par comparaison $\sum |U_n|$ div

alors $\sum U_n$ est semi-convergente.

8)- $U_n = \sin(\frac{1}{n}) . \cos(n)$

$= \left(\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n^2})\right) . \cos(n)$

$= \frac{\cos n}{n} + \frac{\cos n}{n^2} . o(1)$

D'après ref 4 (Abel) $\sum \frac{\cos n}{n}$ est C.V ... (1)

on a aussi : posons $W_n = \frac{\cos n}{n^2} . o(1)$

$\lim_{n \to +\infty} n^{3/2} \left|\frac{\cos n}{n^2} . o(1)\right| = \lim_{n \to +\infty} \left|\underbrace{\cos n}_{\text{bornée}} . \frac{1}{\sqrt{n}}^{\to 0} . o(1)^{\to 0}\right| = 0$

D'après la Règle de l'ordre :

$\sum W_n$ C.V abs $\Rightarrow W_n$ C.V ... (2)

par linéarité de (1) et (2) on a: $\sum \sin(\frac{1}{n}) . \cos(n)$ C.V

$|\sin(\frac{1}{n})| \geqslant |\frac{1}{n}|$

. conv abs

$|\cos n . \sin(\frac{1}{n})| \sim \left|\frac{\cos(n)}{n^\alpha}\right|$ car CV abs si $\alpha > 1$ et CV si $\alpha > 0$

D'après la référence 4 (Abel) on a div abs

$\Rightarrow \sum \cos n . \sin(\frac{1}{n})$ div abs.

9) - $\dfrac{(-1)^n \cos n}{\sqrt{n}}$ ou on pose $\cos(n\pi) = (-1)^n$

$U_n = (-1)^n \cos(n)$ et $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \searrow$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

$$\left|\sum_{n \geq 0} (-1)^n \cos(n)\right| \leq \left|\sum_{n \geq 0} \cos n\right| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{1}{2})|}$$ i.e $\left|\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n \cos(n)\right| \leq \dfrac{1}{\sin(\frac{1}{2})}$

car : $|1 - \cos(1) + \cos(2) - \cos(3)| \leq |1 + \cos(1) + \cos(2) + \cos(3)| = \left|\sum\limits_{k=0}^{n} \cos k\right|$

alors $\sum \dfrac{(-1)^n \cos n}{\sqrt{n}}$ C.V d'après Abel (1).

- conv abs :

$|U_n| = \dfrac{|\cos(n)|}{\sqrt{n}}$ div (d'après la ref 4 (Abel) on a : $\alpha = 1$) ($\alpha > 1$ C.V

Exercice 6.

1) - $$\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(\frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}}\right) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + o\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{\substack{\text{Liebnich} \\ (C.V)}} + \underbrace{\frac{1}{n^{2\alpha}}}_{\substack{\text{Rieman} \\ (C.V) \\ \text{si } \alpha > \frac{1}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$

$\left|o\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right| < \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$

et $\sum \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$ C.V d'après Rieman si $2\alpha > 1 \Rightarrow \alpha > \frac{1}{2}$

donc $\sum U_n$ C.V ssi $\alpha > \frac{1}{2}$

2) $U_n = \left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^{2n} \cdot \beta^n$

$U_n^{\frac{1}{n}} = \left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^2 \cdot \beta \sim \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \beta$

$\frac{1}{4}\beta < 1 \Rightarrow \beta < 4 \Rightarrow \sum U_n$ C.V

$\frac{1}{4}\beta > 1 \Rightarrow \beta > 4 \Rightarrow \sum U_n$ div

$\beta = 4$ $$U_n = (2^{2n})\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{2n} = \left(\frac{2(n+1)}{2n-1}\right)^{2n} = e^{2n \cdot \log\left(\frac{2n+2}{2n-1}\right)}$$
$$= e^{2n \log\left(1 + \frac{3}{2n-1}\right)}$$

alors $$U_n = e^{2n\left(\frac{3}{2n-1} + o\left(\frac{3}{2n-1}\right)\right)}$$
$$= e^{\left(\frac{6n}{2n-1} + o\left(\frac{6n}{2n-1}\right)\right)} \sim e^3$$

$\Rightarrow \sum U_n$ div