UNIVERSITÉ BATNA-2
FACULTÉ MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT INFORMATIQUE

COURS

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

L3 INFORMATIQUES

Présenté par

Abderahmene IKASSOULENE

2020 / 2021

Table des matières

Chapitre 1

Espaces probabilisés

1.1 Expériences aléatoires

1.1.1 Vocabulaire

Définition 1.1. *On appelle expérience aléatoire toute expérience dont le résultat ne peut être déterminé a priori, c'est-à-dire qui dépend du hasard.*

Exemple

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note le résultat. On e ectue donc une expérience aléatoire.

Définition 1.2. *On appelle univers de l'expérience aléatoire, l'ensemble Ω des issues ou résultats possibles de l'expérience. Les éléments de Ω se notent souvent ω.*

Exemples

1) On lance un dé et on note le résultat, l'univers de l'expérience est alors :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

2) On lance une pièce et on regarde si elle tombe sur Pile ou Face, l'univers est alors :

$$\Omega = \{Pile, Face\}.$$

3) On choisit simultanément 5 cartes dans un jeu de 32 cartes, l'univers est alors l'ensemble des sous-ensembles de 5 éléments (sans ordre) parmi les 32 cartes.

4) Si on lance trois fois un dé à six faces et que l'on note les trois résultats, on réalise une expérience dont l'univers est

$$\Omega = \{(x, y, z)/x, y, z = 1, .., 6\}$$

. 5) Si on choisit au hasard un réel compris entre 0 et 1, l'univers de l'expérience est [0, 1].

Définition 1.3. *On appelle événement toute partie de l'univers Ω de l'expérience aléatoire.*

Remarques

1) Lorsqu'on regarde l'expérience aléatoire, un événement est un fait lié à cette expérience pouvant se produire ou non.

2) L'ensemble des événements est donc l'ensemble des parties de Ω, c'est donc $\mathcal{P}(\Omega)$.

Exemples

1) On lance un dé et on regarde le résultat. Regardons l'événement A : "le chiffre obtenu est un nombre pair". L'événement A est réalisé lorsque le résultat est 2, 4, 6. On écrit alors $A = \{2, 4, 6\}$.

2) Un événement qui est toujours réalisé est appelé un événement certain, il est donc représenté par l'ensemble Ω.

3) Un événement qui n'est jamais réalisé est appelé un événement impossible, il est représenté par l'ensemble vide ϕ.

Remarques

Un événement est une partie de Ω, donc peut être vu comme un sous-ensemble de Ω. On garde donc exactement le même vocabulaire pour les événements que pour les ensembles.

1) L'événement contraire de A est représenté par le complémentaire de A dans Ω que l'on note $\bar{A}$.

2) L'événement "A et B sont réalisés" est représenté par $A \cap B$.

3) L'événement "A ou B est réalisé" est représenté par $A \cup B$.

4) On dit que deux événements A et B sont incompatibles s'ils ne peuvent pas être réalisés simultanément, c'est-à-dire si $A \cap B = \phi$.

5) L'événement "A est réalisé et B n'est pas réalisé" est représenté par $A - B$.

6) On dit que "l'événement A implique l'événement B" si la réalisation de A entraîne la réalisation de B, c'est-à-dire si $A \subset B$.

Définition 1.4. *Les événements qui sont représentés par un singleton* $\{\omega\}$ *sont appelés des événements élémentaires.*

Exemple

Si on lance un dé et qu'on note le résultat, l'événement "obtenir 2", $A = \{\ 2\}$ est un évènement élémentaire. L'événement "Obtenir un nombre pair", $B = \{2, 4, 6\}$ n'est pas un événement élémentaire.

1.1.2 Fréquence et probabilité

Soit E une expérience aléatoire. Tous les événements liés à (E) n'ont pas tous la même "chance" de se produire. Pour essayer de "mesurer" cette chance, il nous faut répéter plusieurs fois l'expérience. Si on répète n fois l'expérience, on compte le nombre P_n de fois où l'événement A se produit, . Le réel P_n/n est appelé la fréquence d'apparition de A , et on note $f(A) = P_n/n$.

Remarques

1) La fréquence f vérifie les propriétés suivantes :

a) $f(A) \in[0, 1]$.

b) Si A et B sont deux événements incompatibles, alors $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$.

c) $f(\bar{A}) = 1 - f(A)$.

d)$f(\Omega) = 1$.

e)$f(\phi) = 0$.

2) Si on fait tendre n vers $+\infty$, $f(A)$ admet une limite infinie qui représentera précisément la proportion d'apparition de A sur toutes les chances possibles. C'est cette limite qu'on appellera probabilité de l'événement A, notée $P(A)$.

1.2 Espaces probabilisés

1.2.1 Probabilité sur un ensemble fini

Définition 1.5. *Soit* Ω *un ensemble fini et soit* $\mathcal{P}(\Omega)$ *l'ensemble de ses parties.*
Le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ *s'appelle un espace probabilisable.*

Remarque

L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifie plusieurs propriétés fondamentales : on dit que c'est une tribu. En effet :

(i) $\Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$

(ii) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \bar{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$

(iii) $\forall A_1, .., A_k \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\bigcup_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{P}(\Omega$

($\mathcal{P}(\Omega)$ est stable par passage au complémentaire, et est stable par réunion.)

Définition 1.6. *Soit* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ *un espace probabilisable. On appelle probabilité définie sur cet espace, toute application :* $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$
qui vérifie :
i) $P(\Omega) = 1$
ii) Si A *et* B *sont deux événements incompatibles, alors*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Le Le triplet $\Omega \in \mathcal{P}(\Omega), P$ *s'appelle un espace probabilisé fini et pour tout événement* A*, le réel* $P(A)$ *s'appelle la probabilité de l'événement* A*.*

1.2.2 Notion de tribu

Il existe des expériences ou l'univers Ω n'est pas fini. Dans ce cas, la construction d'une probabilité sera un peu plus délicate.

Exemple

On considère l'expérience suivante : on lancer une pièce jusqu'à obtenir Pile au moins une fois et on note le nombre de lancers qui ont été nécessaires pour obtenir ce premier Pile. Ici, l'univers de l'expérience est :

$$\Omega = \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$$

car le nombre de lancers nécessaires pour obtenir Pile peut être n'importe quel nombre (peut-être très grand).

Remmaque

Contrairement au cas fini, parmi les parties de Ω, il ne faut s'intéresser qu'à celles dont on peut calculer la probabilité

Définition 1.7. *Soit Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, donc un ensemble de parties de Ω.*
On dit que $\mathcal{A}$ est une tribu de parties de Ω si :
1) $\Omega \in \mathcal{A}$.
2) Si $A \in \mathcal{A}$, alors $\bar{A} \in \mathcal{A}$.
3) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Exemple

1) L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu de parties de Ω.
2) Si $A \subset \Omega$, alors $\mathcal{A} = \{\phi, A, \bar{A}, \Omega\}$ est une tribu.

Définition 1.8. *Soient Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu de parties de Ω. Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ s'appelle un espace probabilisable.*
Les événements de $\mathcal{A}$ sont des événements de l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

Définition 1.9. *Soient Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu de parties de Ω. Alors*
1. $\phi \in \mathcal{A}$.
2. Si A et A sont deux événements de $\mathcal{A}$, alors $A \cup B$, $A \cap B$ et $A - B$ sont dans $\mathcal{A}$.
3. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

1.2.3 Espace probabilisé général

Définition 1.10. *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle probabilité définie sur cet espace, toute application : $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$*
qui vérifie :
i) $P(\Omega) = 1$.
ii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles (disjoints), alors

$$P \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Sigma_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Le Le triplet $\Omega \in \mathcal{A}, P$ s'appelle un espace probabilisé.

Remarque

La série $P(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien convergente.

Définition 1.11. *Un événement* $A \in \mathcal{A}$*est dit :*

1) négligeable si $P(A) = 0$*,*

2) presque sûr si $P(A) = 1$*.*

1.2.4 Propriétés

Proposition 1.1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé et soient* A *et* B *deux événements. Alors*

1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$*.*

2) En particulier, $P(\phi) = 1 - P(\Omega) = 0$*.*

3) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$*.*

4) Si $A \subset B$*, alors* $P(A) \leq P(B)$*.*

5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$*.*

Remarque

La formule 5) est vraie dans le cas général. On a par exemple pour trois ensembles :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + p(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

1.2.5 Événements élémentaires

Définition 1.12. *Soit* Ω *un ensemble fini :*$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$*.*

Les événements $\{\omega i\}$ *sont appelés les événements élémentaires.*

Proposition 1.2. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé fini. Pour tout événement* A*, on a :*

$$P(A) = P(\{\omega/\omega \in A\} = \Sigma_{\omega_i \in A} P(\omega_i)).$$

En particulier, si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$*, alors*

$$\Sigma_{k=1}^{n} P(\omega_k) = 1.$$

Remarque

On voit que pour calculer $P(A)$ de n'importe quel événement A, il suffit de savoir calculer les probabilités des événements élémentaires.

1.2.6 Le modèle d'équiprobabilité

Définition 1.13. *Soit Ω un ensemble fini.*

On dit que l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est en situation d'équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, l'équiprobabilité se traduit par :

$$\forall k = 1, .., n; P(\omega_k) = 1/n.$$

Théorème 1.1. *(Formule dans le cas d'équiprobabilité)*

Si un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est en situation d'équiprobabilité, alors pour tout événement A, on a :

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorables\ a\ A}{Nombre\ de\ cas\ total}$$

Exemples

1) On lance un dé équilibré. On a $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Les événements sont alors tous équiprobables.

2) On lance deux dés équilibrées. On a $\Omega = \{(i, j)/i, j = 1, .., 6\}$.

Les événements sont alors tous équiprobables.

Remarque

La situation d'équiprobabilité est un cas très particulier. Dans la plupart des cas sont en situation de non-équiprobabilité.

Exemple

On lance un dé, et à cause d'un défaut de fabrication, le 6 a deux fois plus de chance de sortir que toutes les autres faces (qui elles sont équiprobables).

On a $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Mais on peut considérer aussi $\Omega' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6_a, 6_b\}$. Alors

$$P(1) = ... = P(5) = 1/7 \ et \ P(6) = 2/7.$$

les événements élémentaires de Ω ne sont pas équiprobables.

1.2.7 Systèmes complets d'évènements

Définition 1.14. *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.*

On appelle système complet d'événements de Ω toute famille $(A_i)_{i \in I}$ d'éléments de A telle que :

(i) Les événements A_i sont deux à deux incompatibles.

(ii) $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

Example

1) On lance un dé équilibré. On a $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

La famille d'événements $(\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\})$ est le système complet d'événements composé des événements élémentaires.

1) On note A l'événement "obtenir un nombre pair" et B l'événement "obtenir un nombre impair". Alors (A, B) forme un système complet d'événements.

Proposition 1.3. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements. Alors*

$$\Sigma_{i \in I} P(A_i) = 1.$$

1.2.8 Théorème de la limite monotone

Définition 1.15. *Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ infni.*

1) On dit que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements de A lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}.$$

On dit que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements de A lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n.$$

Théorème 1.2. *(Théorème de la limite monotone)*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements de A, alors la suite $(P(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et

$$P(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = lim_{n \to +\infty} P(A_n).$$

2) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements de A, alors la suite $(P(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et

$$P(\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = lim_{n \to +\infty} P(A_n).$$

Exemple

On considère une infinité de lancers de dés et on veut déterminer la probabilité de ne jamais obtenir de 1.

Pour cela, on introduit l'événement B : "ne jamais obtenir de 1",

ainsi que les événements $\forall n \in \mathbb{N}$, B_n : "ne pas obtenir de 1 au cous des n premiers lancers". Alors, on a

$$B = \cap_{n=0}^{n=+\infty} B_n$$

De plus, on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(B_n) = (5/6)^n$$

et "ne pas obtenir de 1 au cours des $n+1$ premiers lancers", implique en particulier que " l'on n'a pas obtenu de 1 au cours des n premiers lancers" : donc $B_{n+1} \subset B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la suite d'événements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante pour l'inclusion.

D'après le Théorème de Limite Monotone,

$$P(B) = P(\cap_{n\in\mathbb{N}} B_n) = lim_{n\to+\infty} P(B_n) = lim_{n\to+\infty}(5/6)^n = 0.$$

D'où

$$P("nejamaisobtenirlaface1") = 0.$$

1.3 Probabilité conditionnelle

La probabilité qu'un événement se réalise peut être influencée si on connaît des informations concernant la réalisation d'un ou plusieurs autres événements. La donnée de la réalisation ou non d'un événement va ainsi réduire l'univers des issues possibles Ω.

Exemple

On lance un dé équilibré et on regarde le résultat.

Notons A l'événement : "on obtient un nombre inférieur ou égal à 5".

Notons B l'événement : "on obtient un nombre supérieur ou égal à 3".

A priori, sans aucune information supplémentaire, on a :

$$P(A) = 5/6, P(B) = 4/6$$

Cependant, supposons que l'on sache que A s'est réalisé, alors les résultats désormais possibles sont $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, et B est réalisé si ce résultat appartient à $\{3, 4, 5\}$ qu'est égale à $A \cap B$. Il a donc 3 cas favorables sur 5.

La probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé est alors de $\frac{3}{5}$.

On vérifie en réalité que

$$\frac{3}{5} = \frac{Card(A \cap B)}{Card(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

1.3.1 Définition

Théorème 1.3. *(Définition)*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit A un événement de probabilité non nulle.

Pour tout évènement B, on définit la probabilité de B sachant A par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Alors la fonction : $P_A : (\Omega, \mathcal{A}) \to [0, 1]$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note parfois

$$P_A(B) = P(A/B)$$

.

Remarque

Comme P_A est une probabilité, on peut appliquer toutes les propriétés vues précédemment pour les probabilités en général.

Proposition 1.4. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soient A et B deux événements. Alors*

1) $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$.

2) Si $C \subset B$, alors $P_A(C) \leq P_A(B)$.

3) $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$.

1.3.2 Grandes formules probabilistes

Remarque

Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$, alors par définition, on a :

$$P(a \cap B) = P(A)P_A(B)$$

Cette formule peut être généralisée de la façon suivante :

Proposition 1.5. *(Formule des Probabilités Composées)*
Soient A, B, C trois événements tels que $P(A \cap B) \neq 0$, alors

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P_A(B)P_{A\cap B}(C)$$

Soient $A_1, ..., A_n$ une famille d'événements telle que $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors on a :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A3)...P_{A_1\cap ...\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Remarque

Lorsqu'on fait par exemple des tirages SUCCESSIFS et SANS REMISE, alors le deuxième tirage dépend du résultat du premier tirage, autrement dit, pour obtenir des informations sur la deuxième boule tirée, il faut conditionner par le résultat du premier tirage. Puis, le troisième tirage dépend des résultats des deux premiers tirages.

Exemple

Une urne contient 3 boules blanches et 7 noires. On tire successivement trois boules sans remise.
Quelle est la probabilité d'obtenir les 3 boules blanches ?
On note $\forall k = 1, 2, 3; B_k$: "obtenir une boule blanche au k-ième tirage".
On note $A = B1 \cap B2 \cap B3$ l'événement cherché : "obtenir trois boules blanches". Alors d'après la formule :

$$P(A) = P(B) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B1)P_{B_1}(B2)P_{B_1\cap B_2}(B3)$$

On a $P(B_1) = 3/10$ (3 blanches sur 10 boules au total).
On a $P_{B_1}(B2) = 2/9$ (il reste alors 2 blanches sur 9 boules au total).
On a $P_{B_1\cap B_2}(B3) = 1/8$ (il reste alors 1 blanche sur 8 boules au total).
Finalement, on a

$$P(A) = 3/10 \cdot 2/9 \cdot 1/8 = 1/120$$

Théorème 1.4. *(Formule des probabilités totales)*
Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. Alors pour tout événement B, on a :

$$P(B) = \Sigma_{i\in I}P(A_i \cap B) = \Sigma_{i\in I}P(A_i)P_{A_i}(B)$$

Remarque

Cela signifie simplement que si $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements, alors lorsqu'un événement B se réalise, il se réalise soit avec A_1, soit avec A_2, soit avec A_3, . . .

Théorème 1.5. *(Formule de Bayes)*

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles et soit B un événement de probabilité non nulle. Alors pour tout $i_0 \in I$, on a :

$$P_B(A_{i_0}) = \frac{P(A_{i_0})P_{A_{i_0}}(B)}{\Sigma_{i\in I}P(A_i)P_{A_i}(B)}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la définition de la probabilité conditionnelle et la formule des Probabilités Totales :

$$P_B(A_{i_0}) = \frac{P(A_{i_0} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_{i_0})P_{A_{i_0}}(B)}{\Sigma_{i\in I}P(A_i)P_{A_i}(B)}$$

□

1.4 Indépendance d'événements

1.4.1 Définition

Définition 1.16. *On dit que deux événements A et B sont indépendants pour la probabilité P si*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Remarques

1) Si A et B sont deux événements indépendants (de probabilité non nulle), alors on a

$$P_A(B) = P(B) \text{ et } P_B(A) = P(A)$$

2) La notion d'indépendance dépend de la probabilité P choisie sur les événements élémentaires.

Exemple

Soit $\Omega = \{2, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et soit l'espace $(\Omega, \mathcal{P})$, sur lequel on définie deux probabilités P_1 et P_2, telles que

$$P_1(1) = 1/6; P_1(2) = 1/6; P_1(3) = 1/3; P_1(4) = 1/9; P_1(5) = 1/9; P_1(6) = 1/9$$

$$P_2(1) = 1/6; P_2(2) = 1/6; P_2(3) = 1/6; P_2(4) = 1/6; P_2(5) = 1/6; P_2(6) = 1/6$$

Soient les évènements $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3\}$, alors $A \cap B = \{2\}$.

$$P_1(A)P_1(B) = (1/6 + 1/6)(1/6 + 1/3) = 1/6 \quad P_1(A \cap B) = 1/6$$

$$P_2(A)P_2(B) = (1/6 + 1/6)(1/6 + 1/6) = 1/9 \quad P_2(A \cap B) = 1/6$$

On remarque que $P_1(A)P_1(B) = P_1(A \cap B)$ et $P_2(A)P_2(B) \neq P_2(A \cap B)$.

Donc A et B sont indépendants pour la probabilité P_1, mais ne sont pas indépendants pour la probabilité P_2.

1.4.2 Propriétés

Proposition 1.6. *Soient A et B deux événements indépendants, alors :*

1) A et $\bar{B}$ sont indépendants,

2) $\bar{A}$ et B sont indépendants,

3) $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

Démonstration. On démontre la première comme suit :

On a $A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ et ces deux événements sont incompatibles, donc

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)P(B) + P(A \cap \bar{B})$$

alors

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B}).$$

□

Définition 1.17. *Soient $A_1, ..., A_n$, n événements.*

1) On dit que les événements sont deux à deux indépendants pour la probabilité P si

$$\forall i \neq j, A_i \textit{ et } A_j \textit{ sont independants}$$

2) On dit que les événements sont mutuellement indépendants pour la probabilité P si pour tout $I \subset \{1, .., n\}$

$$P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

Définition 1.18. *Soient (A_n), une suite infinie d'événements.*

On dit que les événements A_n sont indépendants, si pour toute partie finie I de $\mathbb{N}$, on a

$$P(\bigcap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} P(A_i)$$