Corrigé de Serie 2, Proba-Stat, L3 Informatique

Exo 1 :

1) $S(X) = \{-1; 0; 4; 5\}$

2) $P[X \leq 3] = P[X=-1] + P[X=0] = 0,2 + 0,1 = 0,3$

$P[X > 2] = P[X=4] + P[X=5] = 0,3 + 0,4 = 0,7$

Exo 2 :

1) On a $\sum_{x_i \in S(X)} P(X = x_i) = 1$, alors

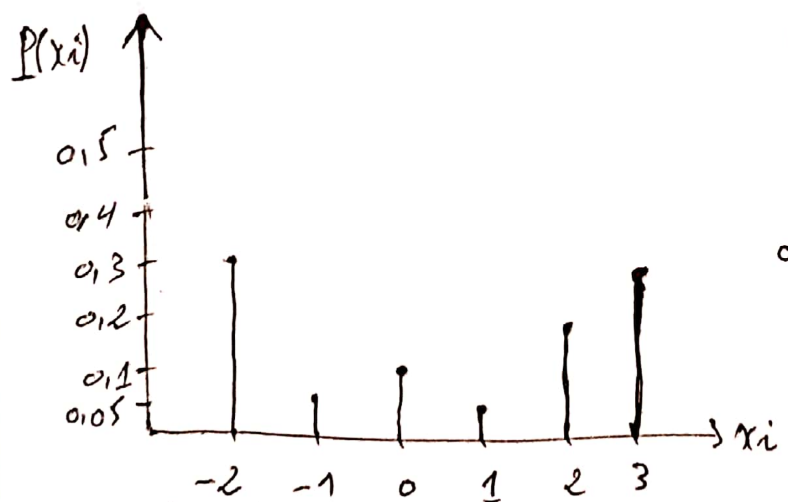
$0,3 + 0,05 + 0,1 + 0,05 + 0,2 + p = 1 \Rightarrow p = 0,3$

2) $F(0,5) = P[X \leq 0,5] = P[X=-2] + P[X=-1] + P[X=0]$

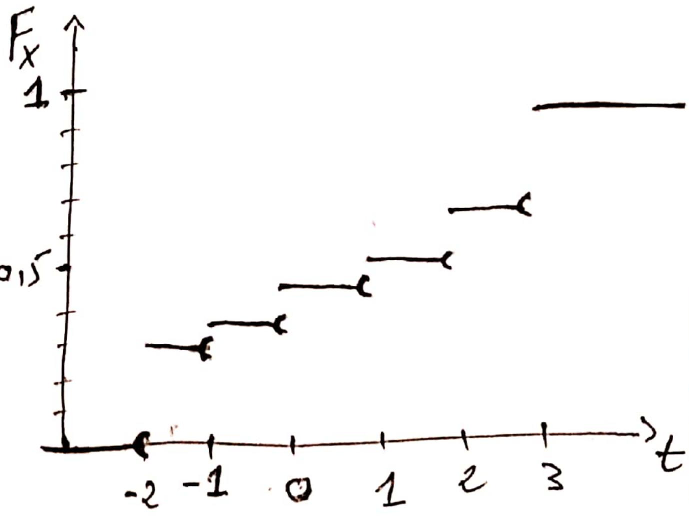
$F(0,5) = 0,3 + 0,05 + 0,1 = 0,45$

3) On a :

$$F_X(t) = P[X \leq t] = \begin{cases} 0 & ; t \in]-\infty; -2[\\ 0,3 & ; t \in [-2; -1[\\ 0,35 & ; t \in [-1; 0[\\ 0,45 & ; t \in [0; 1[\\ 0,5 & ; t \in [1, 2[\\ 0,7 & ; t \in [2, 3[\\ 1 & ; t \in [3, +\infty[\end{cases}$$



Loi de X



Fonction de répartition

Exo 3 :

1) La loi de X_i

la variable X presente les montants gagnés selon le nombre de rois dans la main, tandis que le nombre de rois dans le paquet de jeux de 32 cartes est de 4 rois. Donc les probabilités de gagner les differentes montants sont données comme suit :

x_i	-500	-100	0	500	1000
$P[X=x_i]$	C_{28}^5/C_{32}^5 $\simeq 0,4880$	$\frac{C_4^1\times C_{28}^4}{C_{32}^5}$ $\simeq 0,4067$	$\frac{C_4^2\times C_{28}^3}{C_{32}^5}$ $\simeq 0,0976$	$\frac{C_4^3\times C_{28}^2}{C_{32}^5}$ $\simeq 0,007$	$\frac{C_4^4\times C_{28}^1}{C_{32}^5}$ $\simeq 0,0001$

2) $P(X \geq 0) = P(X=0) + P(X=500) + P(X=1000)$

$= 0,0976 + 0,007 + 0,0001$

$= 0,0984.$

que signifie que la probabilité de gagner (ou ne pas perdre) égale à $0,0984$.

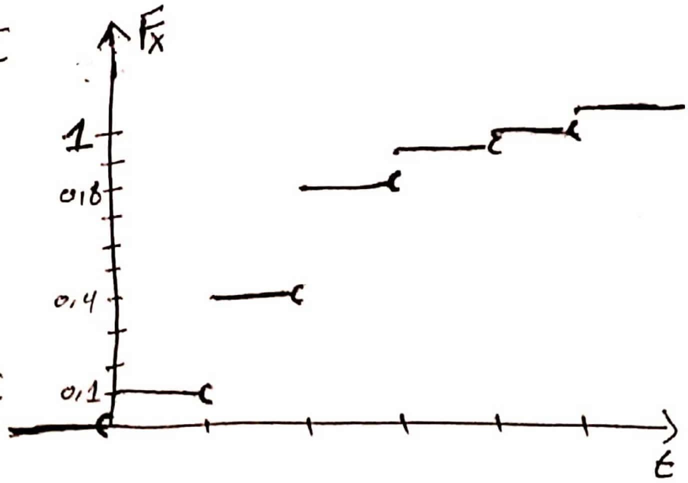
3) La probabilité qu'on perd c-à-d $P(X<0)$:

$P(X<0) = 1 - P(X \geq 0) \simeq 1 - 0,0984 \simeq 0,9016$

Exo 4 :

1) La fonction de repartition

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & ; t \in]-\infty; 0[\\ 0,1 & ; t \in [0; 1[\\ 0,4 & ; t \in [1; 2[\\ 0,8 & ; t \in [2, 3[\\ 0,9 & ; t \in [3, 4[\\ 0,95 & ; t \in [4, 5[\\ 1 & ; t \in [5; +\infty[\end{cases}$$



2) * $P[X<4] = P[X=0] + P[X=1] + P[X=2] + P[X=3]$

$= 0,1 + 0,3 + 0,4 + 0,1$

$= 0,9$

* $P[X>2] = P[X=3] + P[X=4] + P[X=5]$

$= 0,1 + 0,05 + 0,05$

$= 0,2$

* $P[2 \leq X < 4] = P[X=2] + P[X=3]$

$= 0,4 + 0,1$

$= 0,5$

* $P[2 < X < 4] = P[X=3] = 0,1$

3) On a : $Y = 3X-5$, donc $P_X(x_i) = P_Y(3x_i-5) = P_Y(y_i)$; $y_i = 3x_i - 5$

D'après cette relation et la loi de X, on trouve la loi de Y comme suit :

y	-5	-2	1	4	7	10
$P_Y(y)$	0,1	0,3	0,4	0,1	0,05	0,05

Exo 5 :

1) La loi de X :

Soit e_i l'envenement correspond au valeur de gain x_i de la variable aleatoire X (exemple : $x_i = 1$ euro ; son évènement correspond est "d'avoir la surface de dé numéroté par 1" c.à.d $e_1 = \{1\}$).

Donc :

La loi de X

x_i	3	2	1	-2
e_i	$\{3\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{4, 5, 6\}$
$P_X(x_i)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$3/6 = 1/2$

* La fonction de répartition de X :

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \begin{cases} 0 & ; t \in]-\infty, -2[\\ 1/2 & ; t \in [-2, 1[\\ 1/2 + 1/6 = 4/6 & ; t \in [1, 2[\\ 5/6 & ; t \in [2, 3[\\ 6/6 = 1 & ; t \in [3, +\infty[\end{cases}$$

2) L'univers Ω de nouveau jeux

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} = \{(x_i, y_j) / x_i y_j = \overline{1,6}\}$

(On rappel que l'univers de premier jeux de la première question est $\Omega' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)

3) La loi de Y (qui désigne la variable aleatoire : le gain de joueur dans la nouvelle expérience)

* On trace d'abord le tableau suivant qui montre le gain correspond à chaque évènement de cette expérience.

U : le résultat de premier jet

V : le résultat de deuxieme jet

U \ V	1	2	3	4	5	6
1	1 euro	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	3	3	3	-5	-5	-5
5	3	3	3	-5	-5	-5
6	3	3	3	-5	-5	-5

Soit e_i l'evenement correspond à la valeur de gain y_i. D'où on trace le tableau suivant qui contient la loi de Y

y_i	-5	1	2	3
e_i	$\{1,\ldots,6\}\times\{4,5,6\}$	$\{1\}\times\{1,2,\ldots6\}$	$\{2\}\times\{1,2,\ldots6\}$	$(\{3\}\times\{1,2,\ldots6\})\cup(\{4,5,6\}\times\{1,2,3\})$
$P_Y(y_i)$	$9/36=1/4$	$6/36=\frac{1}{6}$	$6/36=\frac{1}{6}$	$\frac{6}{36}+\frac{9}{36}=5/12$

EXO6:

Soit X le nombre de personnes dans la salle d'attente qui ont un groupe sanguin A. Notons par A aussi l'événement « la personne a pour groupe sanguin A ».

1) D'après l'énoncé de l'exercice on a : $P(A) = 4\% = 0{,}04$

La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $p = P(A) = 0{,}04$ et $n = 30$. Donc $P(X=k) = C_{30}^{k}(0{,}04)^k(0{,}96)^{30-k}$

* La probabilité que les médecins trouvent une personne de groupe A (c.à.d une personne au moins) est

$P(X\geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - C_{30}^{0}(0{,}04)^0(0{,}96)^{30} \simeq 0{,}706$

2) Si on était au pays C_2 où 8% de la population ont du groupe sanguin A ($p=0{,}08$), alors

$P(X\geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - C_{30}^{0}(0{,}08)^0(0{,}92)^{30} \simeq 0{,}918$

3) Si on était au pays C_3 où il y a 1% ont de groupe A. ($p=0{,}01$), alors

$P(X\geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - C_{30}^{0}(0{,}01)^0(0{,}99)^{30} \simeq 0{,}26$

EXO7 :

INDICATION : vous pouvez comprendre parfaitement cette solution après avoir lire la prochaine suite du cours.

1) Notons X le temps d'attente de la ligne n°1 et Y celui de la ligne n°2.

Le temps moyen est l'espérance donc on doit avoir

$E(X) = 5$ et $E(Y) = 10$.

Mais (d'après la prochaine suite de cours) l'esperance d'une loi geométrique de paramètre p est $1/p$ donc le paramètre de X est $\frac{1}{5}$ et celui de Y est $1/10$. Donc on a :

$$P(X=n) = p(1-p)^{n-1} = \frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5}\right)^{n-1} \text{ et}$$

$$P(Y=n) = p(1-p)^{n-1} = \frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

2) On a :

$$P(5 \leq X \leq 15) = P(X=5) + P(X=6) + \dots + P(X=15)$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^4 + \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^5 + \dots + \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{14}$$

$$= \frac{1}{5}\left[\left(\frac{4}{5}\right)^4 + \left(\frac{4}{5}\right)^5 + \dots \left(\frac{4}{5}\right)^{14}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[\left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{11} - 1}{\frac{4}{5} - 1}\right]$$

$$\simeq 0,374 .$$

et

$$P(5 \leq Y \leq 15) = P(Y=5) + P(Y=6) + \dots + P(Y=15)$$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^4 + \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^5 + \dots + \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{14}$$

$$= \frac{1}{10}\left[\left(\frac{9}{10}\right)^4 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 + \dots + \left(\frac{9}{10}\right)^{14}\right]$$

$$= \frac{1}{10}\left[\left(\frac{9}{10}\right)^4 \cdot \frac{1 - (9/10)^{11}}{1 - 9/10}\right] \simeq 0,4502$$

3) On rappel que une loi geometrique prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$

$$P(X>15) = 1 - P(X\leq 15) \simeq 1 - [P(X=1)+\cdots P(X=15)]$$
$$= 1 - [\tfrac{1}{5}(\tfrac{4}{5})^0 + \tfrac{1}{5}(\tfrac{4}{5})^1 + \cdots \tfrac{1}{5}(\tfrac{4}{5})^{14}]$$
$$= 1 - \tfrac{1}{5}[1 + \tfrac{4}{5} + (\tfrac{4}{5})^2 + \cdots + (\tfrac{4}{5})^{14}]$$
$$= 1 - \tfrac{1}{5}\left[\frac{1-(\frac{4}{5})^{15}}{1-\frac{4}{5}}\right]$$
$$= (\tfrac{4}{5})^{15} \simeq 0,0351$$

et

$$P(Y>15) = 1 - P(Y\leq 15) = 1 - [P(Y=1)+\cdots + P(Y=15)]$$
$$= 1 - [\tfrac{1}{10}(\tfrac{9}{10})^0 + \tfrac{1}{10}(\tfrac{9}{10})^1 + \cdots + \tfrac{1}{10}(\tfrac{9}{10})^{14}]$$
$$= 1 - \tfrac{1}{10}[1 + \tfrac{9}{10} + (\tfrac{9}{10})^2 + \cdots + (\tfrac{9}{10})^{14}]$$
$$= 1 - \tfrac{1}{10}\left[\frac{1-(\frac{9}{10})^{15}}{1-\frac{9}{10}}\right]$$
$$= (\tfrac{9}{10})^{15} \simeq 0,205\ldots$$

Exo 8:

1) Puisque X suit la loi de poisson, alors

$P(X=n) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$ où le parametre $\lambda = 3,87$; donc

$$P(X=n) = e^{-3,87}\frac{(3,87)^n}{n!} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

On a

$$P(X=0) = e^{-3,7}\frac{(3,87)^0}{0!} = e^{-3,7} \simeq 0,0209$$

Il y a 0,0209 de probabilité qu'il y ait zéro désintegrations durant une période de 7,5 secondes.

2) $P(2 \leq X \leq 4) = ?$

$$P(2 \leq X \leq 4) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$$

$$= e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^3}{3!} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^4}{4!}$$

$$= e^{-\lambda}\left[\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{6} + \frac{\lambda^4}{24}\right]$$

$$\simeq 0{,}552 ..$$

Exo9:

1) $S(X) = \{0;1;2;\cdots;50\}$

2) La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}01$: $\mathcal{B}(50; 0{,}01)$.

3) On calcule la probabilité que aucun ordinateur n'est en panne :

on a : $P(X=k) = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}$

donc $P(X=0) = C_{50}^0 (0{,}01)^0 (1-0{,}01)^{50-0}$

$P(X=0) = 0{,}605...$

4) La probabilité que 5 ordinateurs soient en panne.

$$P(X=5) = C_{50}^5 (0{,}01)^5 (0{,}99)^{45} = \frac{50!}{5!\,45!}(0{,}01)^5 (0{,}99)^{45} \simeq 0{,}00013...$$

5) $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0{,}605 \simeq 0{,}395$

6) $P(X=3)$ signifie la probabilité que 3 ordinateurs soient en panne. $P(X=3) = C_{50}^3 (0{,}01)^3 (0{,}99)^{47} \simeq 0{,}0122$

7) $P(X \leq 3)$ signifie la probabilité que 3 ordinateurs au plus soient en panne, $P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$

$$P(X \leq 3) = 0{,}605 + C_{50}^1\, 0{,}01 \times (0{,}99)^{49} + C_{50}^2 (0{,}01)^2 (0{,}99)^{48} + 0{,}0122 \simeq 0{,}99837..$$

 Mr.IKASSOULENE