Corrigé Type de TD N° 1

Topologie L2-SAD

Exo1

1.1) Montrons que d_1 est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

i) Montrons que $d_1(x,x)=0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

On a $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$; $x=(x_1,\dots x_i,\dots x_n)$

$y=(y_1,\dots y_i,\dots y_n)$

alors $d_1(x,x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i| = \sum_{i=1}^{n} |0| = 0$

ii) Montrons que $d_1(x,y) = d_1(y,x)$, $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$

On a $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d_1(y,x)$

iii) Montrons que $d_1(x,y) \leq d_1(x,z) + d_1(z,y)$; $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$

On a : $|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|$, $\forall x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}$

donc $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \left[|x_i - z_i| + |z_i - y_i| \right]$

$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i|$

alors $d_1(x,y) \leq d_1(x,z) + d_1(z,y)$

iv) Montrons que $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$; $d_1(x,y)=0 \Rightarrow x=y$

Soit $d_1(x,y) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0 \Rightarrow |x_i - y_i| = 0 \quad \forall i=\overline{1,n}$

$\Rightarrow x = y$

On conclure que d_1 est une distance sur $\mathbb{R}^n$

1.2) Montrons que d_∞ est une distance sur $\mathbb{R}^n$

i) Montrons que $d_\infty(x,x) = 0$; $\forall x \in \mathbb{R}^n$

On a $d_\infty(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$; alors $d_\infty(x,x) = \max_{1\leq i \leq n} |x_i - x_i|$

donc $d_\infty(x,x) = \max_{1 \leq i \leq n} |0| \Rightarrow \underline{d_\infty(x,x) = 0}$

ii) Montrons que $d_\infty(x,y) = d_\infty(y,x)$; $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$

On a $d_\infty(x,y) = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| = \max\limits_{1\leq i\leq n} |y_i - x_i| = d_\infty(y,x)$

iii) Montrons que $d_\infty(x,y) \leq d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y)$; $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$

On a $|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|$ $\forall x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{1,n}$

$\Rightarrow \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| \leq \max\limits_{1\leq i\leq n} \left[|x_i - z_i| + |z_i - y_i|\right]$

$\leq \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i - z_i| + \max\limits_{1\leq i\leq n} |z_i - y_i|$

donc $d_\infty(x,y) \leq d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y)$.

iv) Montrons que $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$; $d_\infty(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

On a : $d_\infty(x,y) = 0 \Rightarrow \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| = 0 \Rightarrow |x_i - y_i| = 0, \forall i = \overline{1,n}$

$\Rightarrow x = y$

On conclure que d_∞ est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

2] On prend $\boxed{n=2}$

2.1) La représentation graphique des boules ouvertes dans $\mathbb{R}^2$ relativement à d_1.

$B_1(a,r) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / d_1(x,a) < r\}$

$= \{x \in \mathbb{R}^2 / \sum\limits_{i=1}^{2} |x_i - a_i| < r\}$

$= \{x \in \mathbb{R}^2 / |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| < r\}$

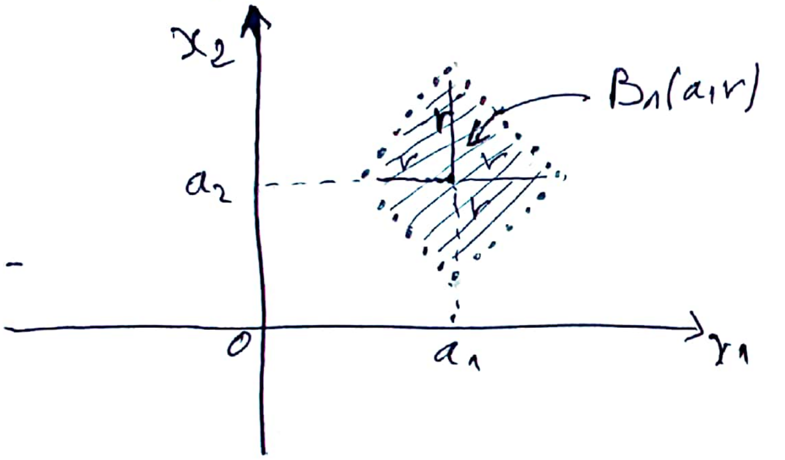
On distingue 4 cas :
$$\begin{cases} (x_1 - a_1) + (x_2 - a_2) < r ; \text{ si : } x_1 > a_1, x_2 > a_2 \\ (x_1 - a_1) - (x_2 - a_2) < r ; \text{ si : } x_1 > a_1 ; x_2 < a_2 \\ -(x_1 - a_1) + (x_2 - a_2) < r ; \text{ si : } x_1 < a_1 ; x_2 > a_2 \\ -(x_1 - a_1) - (x_2 - a_2) < r ; \text{ si : } x_1 < a_1 ; x_2 < a_2 \end{cases}$$

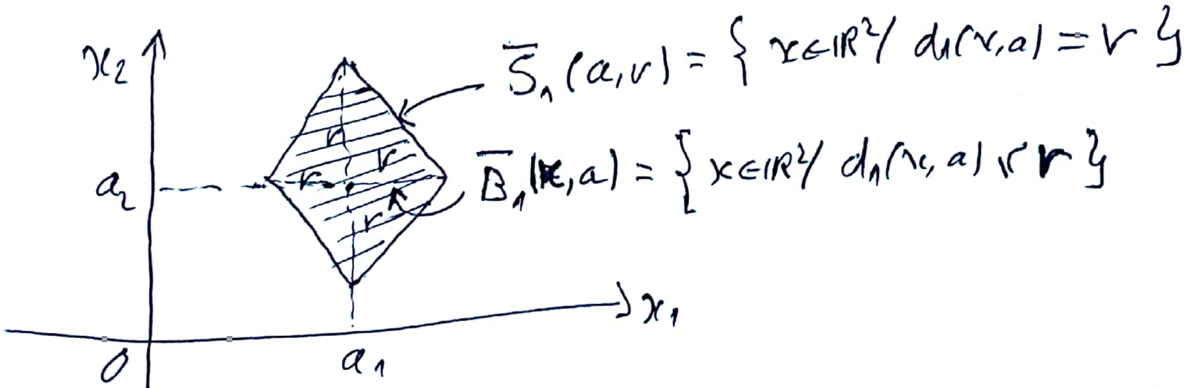
On fait un changement de variables : $\begin{cases} X_1 = x_1 - a_1 \\ X_2 = x_2 - a_2 \end{cases}$

On trouve le nouveau système :

$$\begin{cases} X_1 + X_2 < r & \text{si } X_1 > 0 \text{ et } X_2 > 0 \\ X_1 - X_2 < r & \text{si } X_1 > 0 \text{ et } X_2 < 0 \\ -X_1 + X_2 < r & \text{si } X_1 < 0 \text{ et } X_2 > 0 \\ -X_1 - X_2 < r & \text{si } X_1 < 0 \text{ et } X_2 < 0 \end{cases}$$

On trace graphiquement ces inégalités, on trouve





2.2) La représentation graphique des boules ouvertes (ou fermées) dans $\mathbb{R}^2$ relativement à d_∞.

$$\begin{aligned} B_\infty(a,r) &= \{x \in \mathbb{R}^2 / d_\infty(a,x) < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 / \max_{i=1,2} |x_i - a_i| < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 / \max(|x_1 - a_1|; |x_2 - a_2|) < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 / \max(|X_1|, |X_2|) < r\} \quad \text{tq} \begin{cases} X_1 = x_1 - a_1 \\ X_2 = x_2 - a_2 \end{cases} \end{aligned}$$

On a : $\max(|x_1|;|x_2|) = \begin{cases} |x_1| & \text{si } |x_1| > |x_2| \\ |x_2| & \text{si } |x_2| > |x_1| \end{cases}$

Donc

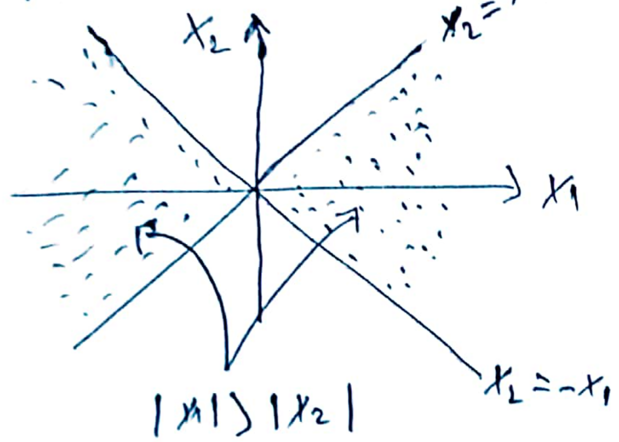
$B_\infty(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 / \ |x_1| < r \text{ et } |x_1| > |x_2|\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 / \ |x_2| < r \text{ et } |x_2| > |x_1|\}$

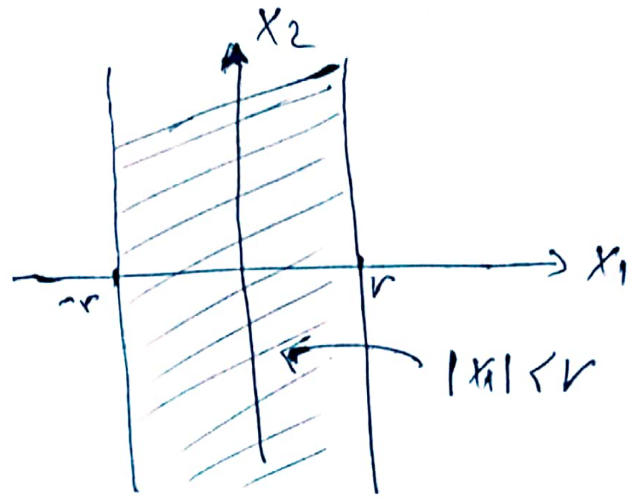
$B_\infty(a,r) = E_1 \cup E_2$ tq

$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 / \ |x_1| < r \text{ et } |x_1| > |x_2|\}$

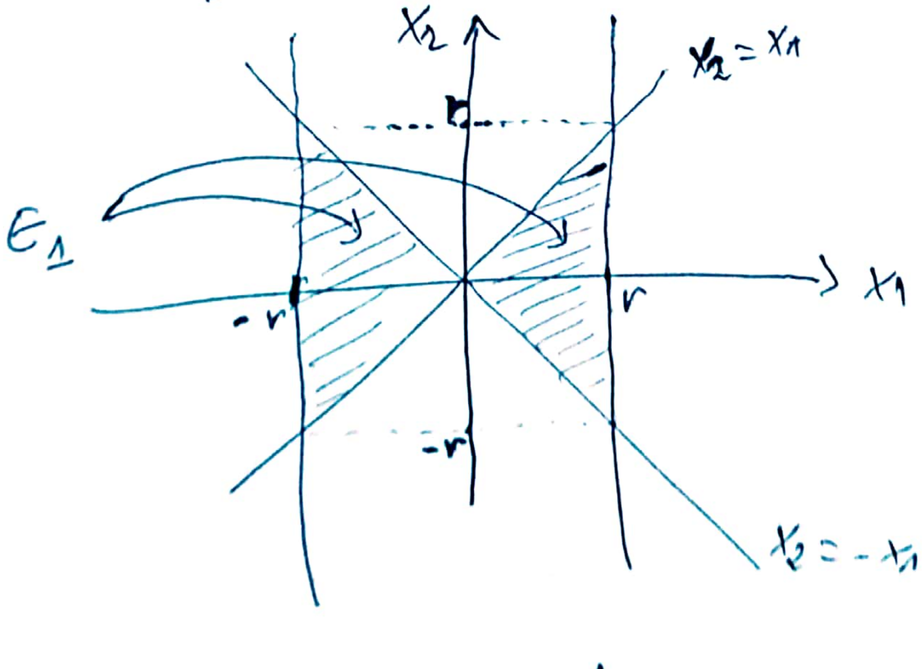
$E_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 / \ |x_2| < r \text{ et } |x_2| | x_1|\}$

A) on trace E_1 :

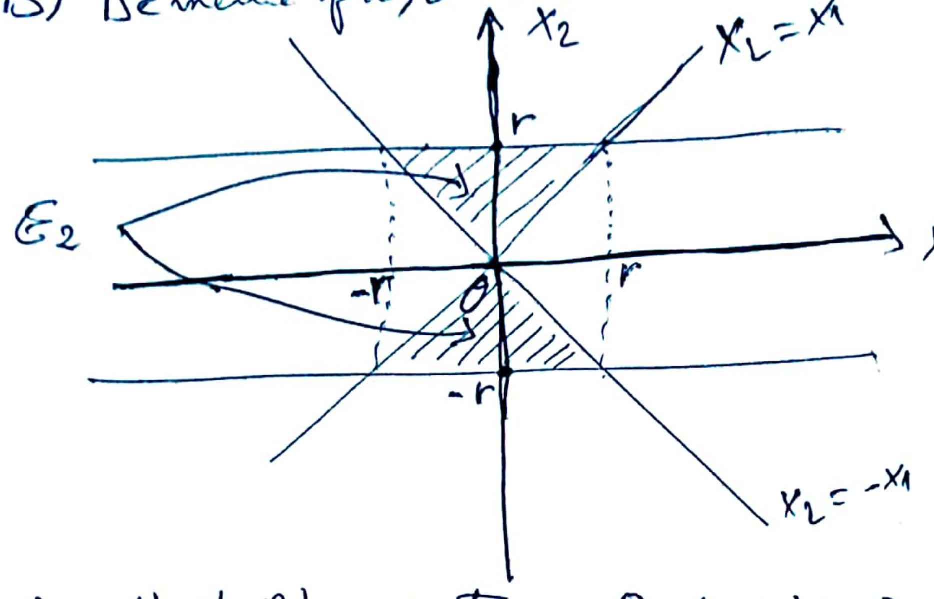




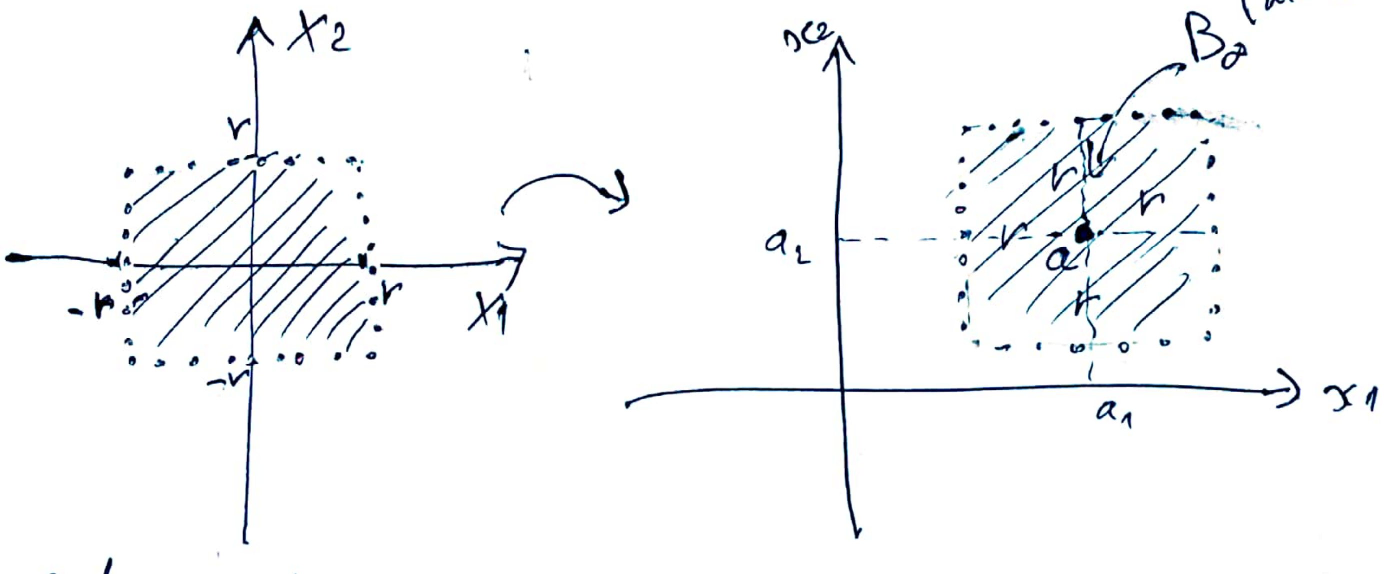
donc E_1 est le domaine suivant :



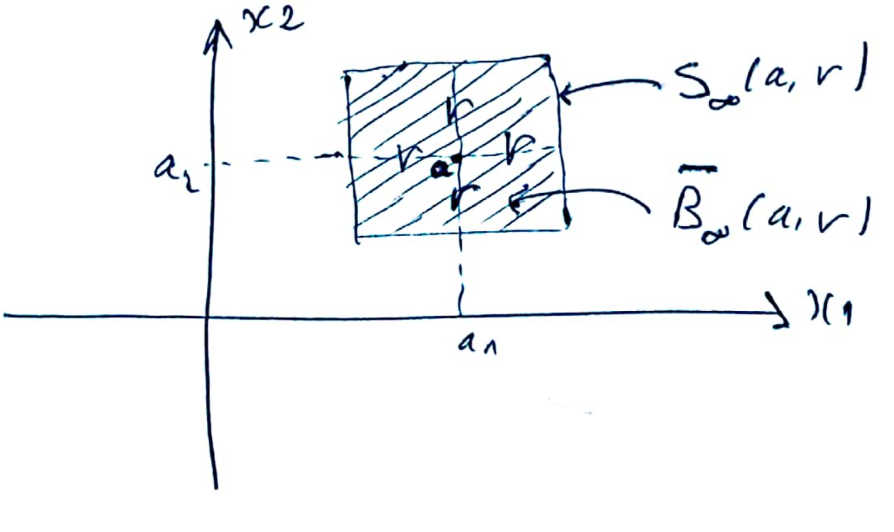
B) De même façon on trace E_2



De A) et B) on trace $B_\infty(a, r) = E_1 \cup E_2$



Et aussi on a



Exo 2

$$d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \forall x=(x_1,\dots,x_n) ; y=(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$$

1) On a :

$$\sum_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = \sum_{i,j} \left[(a_i b_j)^2 + (a_j b_i)^2 - 2(a_i b_j)(a_j b_i) \right]$$

$$= \sum_{i,j} (a_i b_j)^2 + \sum_{i,j} (a_j b_i)^2 - 2\sum_{i,j} (a_i b_j)(a_j b_i)$$

$$= \sum_{i,j} (a_i b_j)^2 + \sum_{i,j} (a_i b_j)^2 - 2\sum_{i,j} (a_i b_i)(a_j b_j)$$

$$= 2\sum_{i,j} (a_i b_j)^2 - 2\left[\sum_i (a_i b_i)\right]\left[\sum_j (a_j b_j)\right]$$

$$= 2\sum_{i,j} (a_i^2 b_j^2) - 2\left[\sum_i (a_i b_i)\right]\left[\sum_i (a_i b_i)\right]$$

$$= 2\left(\sum_i a_i^2\right)\left(\sum_j b_j^2\right) - 2\left[\sum_i a_i b_i\right]^2$$

$$= 2\left(\sum_i a_i^2\right)\left(\sum_i b_i^2\right) - 2\left(\sum_i a_i b_i\right)^2$$

$$= 2\left[\sum a_i^2 \sum b_i^2 - \left(\sum_i a_i b_i\right)^2\right]$$

2) Dans 1) on a $\sum_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \geq 0$, donc

$$2\left[\sum_i a_i^2 \sum_i b_i^2 - \left(\sum_i a_i b_i\right)^2\right] \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_i a_i^2 \sum_i b_i^2 - \left(\sum_i a_i b_i\right)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum a_i^2 \sum_i b_i^2 \geq \left(\sum a_i b_i\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\sum_i a_i b_i\right)^2 \leq \sum_i a_i^2 \sum_i b_i^2$$

$$\Rightarrow \sum_i a_i b_i \leq \left[\sum_i a_i^2 \sum_i b_i^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \sum_i a_i b_i \leq \left(\sum_i a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_i b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

3) on a $\sum_i a_i b_i \leq \left(\sum_i a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_i b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow 2\sum_i a_i b_i \leq 2\left(\sum_i a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_i b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \sum_i a_i^2 + \sum_i b_i^2 + 2\sum_i a_i b_i \leq \sum_i a_i^2 + \sum_i b_i^2 + 2\left(\sum_i a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_i b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \sum_i (a_i + b_i)^2 \leq \left[\left(\sum_i a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_i b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

$$\Rightarrow \left[\sum_i (a_i + b_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_i a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_i b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_i |a_i + b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_i a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_i b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

4) Montrons que d_2 est une distance sur $\mathbb{R}^n$:

4.1 Montrons que $d_2(x, x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$

on a $d_2(x,x) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |0|\right)^{\frac{1}{2}} = 0$

4.2 Montrons que $d_2(x,y) = d_2(y,x)$; $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

on a: $d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = d_2(y,x)$

4.3) Montrons que $d_2(x,y) \leq d_2(x,z) + d_2(z,y); \forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$

On a : $d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\underbrace{(x_i - z_i)}_{a_i} + \underbrace{(z_i - y_i)}_{b_i}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ d'après 3)

$= d_2(x,z) + d_2(z,y)$

donc : $d_2(x,y) \leq d_2(x,z) + d_2(z,y)$

4.4) Montrons que $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y ; \forall x,y \in \mathbb{R}^n$

on a : $d(x,y) = 0 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0$

$\Rightarrow |x_i - y_i| = 0, \forall i = \overline{1,n}$

$\Rightarrow x_i = y_i ; \forall i = \overline{1,n} \Rightarrow x = y$

On conclure que d_2 est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

EXO 3

On a $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$

* Montrons que d est une distance

1) Montrons que $d(x,x) = 0, \forall x \in E$

par définition on a $d(x,y) = 0$ si $x = y \Rightarrow d(x,x) = 0$

2) Montrons que $d(x,y) = d(y,x); \forall x,y \in E$

on a $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } y = x \\ 1 & \text{si } y \neq x \end{cases} = d(y,x)$

3) Montrons que $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in E$

a) si $d(x,y)=0$ $(x=y)$ l'inégalité est vraie $\forall x,y,z \in E$

b) si $d(x,y)=1$ $(x\neq y)$, le seul cas dont l'inégalité est fausse, est : $d(x,y)=1$ et $d(x,z)=0$ et $d(z,y)=0$

c.à.d $(x\neq y)$ et $(x=z)$ et $(z=y)$ $\Rightarrow (x\neq y)$ et $(x=y)$

qu'est une contradiction.

donc si $d(x,y)=1$, l'inégalité est vraie $\forall x,y,z \in E$

De a) et b) on déduit que l'inégalité triangulaire est vérifiée

4) Montrons que $\forall x,y \in E$; $d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$

par définition $d(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{si } x=y \\ 1 & \text{si } x\neq y \end{cases}$ l'implication ci-dessus

est vraie.

On conclure alors que d est une distance sur E

Exo 4

Montrons que $d(x,z) \geq |d(x,y)-d(y,z)|$; $\forall x,y,z \in E$

a) on a, puisque d est une distance ;

$d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$; $\forall x,y,z \in E$

$\Rightarrow d(x,z) \geq d(x,y)-d(y,z)$ —— (1)

b) et on a aussi

$d(y,z) \leq d(y,x)+d(x,z)$; $\forall x,y,z \in E$

$\Rightarrow -d(x,z) \leq d(x,y)-d(y,z)$ —— (2)

De (1) et (2) on a ; $-d(x,z) \leq d(x,y)-d(y,z) \leq d(x,z)$

$\Rightarrow |d(x,y)-d(y,z)| \leq d(x,z)$; $\forall x,y,z \in E$

EXOS

On a : (E, d) un espace métrique

1) Montrons que $d' = \min(1, d)$ est une distance

1.1) Montrons que $d'(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; $\forall x,y \in E$

on a : $d'(x,y) = 0 \Leftrightarrow \min(1, d(x,y)) = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

1.2) Montrons que $d'(x,y) = d'(y,x)$; $\forall x,y \in E$

on a : $d'(x,y) = \min(1, d(x,y)) = \min(1, d(y,x)) = d'(y,x)$

1.3) Montrons que $d'(x,y) \leq d'(x,z) + d'(z,y)$; $\forall x,y,z \in E$

i) Si $1 \leq d(x,y)$ alors $\min(1, d(x,y)) = 1$ et on a les cas suivants :

a) $1 \leq 1 + 1$ vérifié

b) $1 \leq 1 + d(z,y)$ vérifié (car $d(x,y) \geq 0$)

c) $1 \leq d(x,z) + 1$ " (car $d(x,z) \geq 0$)

d) $1 \leq d(x,z) + d(z,y)$ vérifié (car $1 \leq d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$)

ii) Si $d(x,y) \leq 1$ alors $\min(1, d(x,y)) = d(x,y)$ et on a les cas :

a') $d(x,y) \leq 1 + 1$ vérifié (car $d(x,y) \leq 1 \leq 1 + 1$)

b') $d(x,y) \leq 1 + d(z,y)$ vérifié (car $d(z,y) \geq 0$)

c') $d(x,y) \leq d(x,z) + 1$ " (car $d(x,z) \geq 0$)

d') $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ vérifié (car d est une distance)

De deux cas i) et ii) : $d'(x,y) \leq d'(x,z) + d'(z,y)$ $\forall x,y,z \in E$

De 1.1) et 1.2) et 1.3) on conclure que d' est une distance sur E.

2) Montrons que $d'' = \frac{d}{1+d}$ est une distance

2.1) Montrons que $d''(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; $\forall x, y \in E$

on a : $d''(x,y) = 0 \Leftrightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (car $d(x,y) \geq 0$)

2.2) Montrons que $d''(x,y) = d''(y,x)$; $\forall x, y \in E$

on a : $d''(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = d''(y,x)$

2.3) Montrons que $d''(x,y) \leq d''(x,z) + d''(z,y)$; $\forall x, y, z \in E$

Soit $f(x) = \frac{x}{1+x}$. cette fonction est croissante sur $\mathbb{R}^+$

on a : $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ $\forall x, y, z \in E$ (car d est une distance)

comme f est croissante, alors

$f[d(x,y)] \leq f[d(x,z) + d(z,y)]$

$$\Rightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq \frac{d(x,z) + d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}$$

$$= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}$$

$$\leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}$$

car $1+d(x,z)+d(z,y) \geq 1+d(x,z)$
et $1+d(x,z)+d(z,y) \geq 1+d(z,y)$

donc

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} \quad \forall x, y, z \in E$$

$\Rightarrow d''(x,y) \leq d''(x,z) + d''(z,y)$ $\forall x, y, z \in E$

on conclure que d'' est une distance sur E

3) Montrons que $d^* = \arctan(d)$ est une distance.

3.1) Montrons que $d^*(x,y) = 0 \iff x = y \; ; \forall x, y \in E$

on a : $d^*(x,y) = 0 \iff \operatorname{arctg} d(x,y) = 0 \iff d(x,y) = 0 \iff x = y$

3.2) Montrons que $d^*(x,y) = d^*(y,x) \; ; \forall x, y \in E$

on a $d^*(x,y) = \operatorname{arctg} d(x,y) = \operatorname{arctg} d(y,x) = d^*(y,x)$

3.3) Montrons que $d^*(x,y) \leq d^*(x,z) + d^*(z,y) \; ; \forall x, y, z \in E$

La fonction $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$

donc : $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \Rightarrow \operatorname{arctg}[d(x,y)] \leq \operatorname{arctg}[d(x,z) + d(z,y)]$

mais $\operatorname{arctg}(\alpha + \beta) \leq \arctan\alpha + \arctan\beta$ (on peut montrer ça)

$\Rightarrow \arctan[d(x,y)] \leq \arctan[d(x,z) + d(z,y)] \leq \arctan(d(x,z)) + \arctan(d(z,y))$

$\Rightarrow \arctan[d(x,y)] \leq \arctan[d(x,z)] + \arctan[d(z,y)]$

$\Rightarrow \quad d^*(x,y) \leq d^*(x,z) + d^*(z,y)$

De 1) et 2) et 3) on conclure que d^* est une distance sur E.

EXO 6 :

* Montrons que $\forall x, y \in E \; (x \neq y) ; \exists r, s \in \mathbb{R}^+ : B(x,r) \cap B(y,s) = \emptyset$

on a $(d(x,y) = 0) \iff (x = y)$ donc $(x \neq y) \iff (d(x,y) \neq 0)$

c à d $d(x,y) > 0$, alors $\exists a \in \mathbb{R}^{+*}$ tq $d(x,y) = a$.

- Prenons $r = a/4$ et $s = a/4$, alors $B(x, \frac{a}{4}) \cap B(y, \frac{a}{4}) = \emptyset$
- Montrons ça par l'absurde ; supposons que $\exists z \in B(x, \frac{a}{4}) \cap B(y, \frac{a}{4})$

alors $a = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \leq \frac{a}{4} + \frac{a}{4} = \frac{a}{2}$ (contradiction)

On conclure que $B(x,\frac{a}{4}) \cap B(y,\frac{a}{4}) = \emptyset$

<u>Remarque</u> : il suffit de prendre r et s tqs $r+s \leq a$.

EXO 7 :

Montrons que d est une distance

① Montrons que $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ tq $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$
$y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$

On a $d(x,y)=0 \Leftrightarrow d[(x_1,x_2,\dots,x_n),(y_1,y_2,\dots,y_n)]=0$

$\Leftrightarrow \max\limits_{1\leq i\leq n} d_i(x_i,y_i)=0$

$\Leftrightarrow d_i(x_i,y_i)=0 \,;\, \forall i=\overline{1,n}$ (car $d_i(\alpha,\beta)\geq 0$ $\forall i=\overline{1,n}$)

$\Leftrightarrow x_i=y_i \,;\, \forall i=\overline{1,n}$

$\Leftrightarrow x=y$

② Montrons que $\forall x,y\in E$; $d(x,y)=d(y,x)$

On a : $d(x,y)=d[(x_1,x_2,\dots,x_n),(y_1,y_2,\dots,y_n)]$

$= \max\limits_{1\leq i\leq n} d_i(x_i,y_i)$

$= \max\limits_{1\leq i\leq n} d_i(y_i,x_i)$

$= d(y,x)$

③ Montrons que $\forall x,y,z\in E$: $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$

Soient $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$; $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ et $z=(z_1,z_2,\dots,z_n)$

puisque $\forall i=\overline{1,n}$, d_i est une distance, alors

$d_i(x_i,y_i)\leq d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i)$; $\forall x_i,y_i,z_i\in E_i$

$\Rightarrow \max\limits_{1\leq i\leq n}[d_i(x_i,y_i)] \leq \max\limits_{1\leq i\leq n}[d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i)]$

$\leq \max\limits_{1\leq i\leq n}[d_i(x_i,z_i)] + \max\limits_{1\leq i\leq n}[d_i(z_i,y_i)]$

$\Rightarrow d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$ ce qui fait la démonstration

Exo8

Montrons que $d[(x_i)_{i\geq 1}, (y_i)_{i\geq 1}] = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\arctan d_i(x_i, y_i)}{2^i}$ est une distance sur $E = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$

A) Montrons d'abord que cette serie converge (i.e $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\arctan d_i(x_i, y_i)}{2^i} < \infty$ $\forall x_i, y_i \in E_i$)

On a : $\arctan d_i(x_i, y_i) \leq \frac{\pi}{2}$, $\forall x_i, y_i \in E_i$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\arctan d_i(x_i, y_i)}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\pi/2}{2^i} = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2} \frac{1-(\frac{1}{2})^{\infty}}{1-\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} < +\infty$$

B) Montrons maintenant que d est une distance :

B-1) Montrons que $\forall x, y \in E$: $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

On a : $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\arctan d_i(x_i, y_i)}{2^i} = 0$

$\Leftrightarrow \arctan d_i(x_i, y_i) = 0$; $\forall i \geq 1$ (car $\arctan d_i(x_i, y_i) \geq 0$ $\forall i \geq 1$)

$\Leftrightarrow d_i(x_i, y_i) = 0$; $\forall i \geq 1$

$\Leftrightarrow x_i = y_i$; $\forall i \geq 1$ (car d_i est une distance)

$\Leftrightarrow x = y$.

B-2) Montrons que $\forall x, y \in E$: $d(x,y) = d(y,x)$

On a $d(x,y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\arctan d_i(x_i, y_i)}{2^i} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\arctan d_i(y_i, x_i)}{2^i} = d(y,x)$

B-3) Montrons que $\forall x, y, z \in E$; $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

On a : $d_i(x_i, y_i) \leq d(x_i, z_i) + d(z_i, y_i)$ (car d_i est une distance)

$\Rightarrow \arctan d_i(x_i, y_i) \leq \arctan(d_i(x_i, z_i) + d(z_i, y_i))$ [car arctan croissante]

$\Rightarrow \arctan d_i(x_i, y_i) \leq \arctan(d_i(x_i, z_i)) + \arctan(d(z_i, y_i))$ [Exo5]

$$\Rightarrow \frac{\arctan d_i(x_i, y_i)}{2^i} \leq \frac{\arctan d_i(x_i, z_i)}{2^i} + \frac{\arctan d_i(z_i, y_i)}{2^i}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\arctan d_i(x_i, y_i)}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\arctan d_i(x_i, z_i)}{2^i} + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\arctan d_i(z_i, y_i)}{2^i}$$

$\Rightarrow d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ ce qui fait la démonstration.

Bon courage