Corrigé de TD N° 3 topologie L2-SAD

Exo 1 :

- X un ensemble non vide muni de sa topologie discrète.
- Montrons qu'une suite d'éléments de X est convergente ssi elle est stationnaire

$\Rightarrow$)

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X qui converge vers l, alors par définition $\forall V\in\mathcal{V}(l), \exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\geq n_0 : U_n\in V$

Comme la topologie est discrète ici ; alors le singleton $\{l\}$ est un ouvert et par conséquence est un voisinage de l. Donc $\exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\geq n_0 : U_n\in\{l\}$ c-à-d $U_n = l, \forall n\geq n_0$. Ce que veut dire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

$\Leftarrow$)

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite stationnaire d'éléments de X, c-à-d $\exists l\in X$ et $\exists n_0\in\mathbb{N}$, $\forall n\geq n_0 : U_n = l$. Donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Exo 2 :

$(X, \mathcal{Z})$ un espace topologique et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X, et soit l'ensemble

$A_k = \{U_n, n\geq k\}$

① Montrons que l'ensemble A des valeurs d'adhérence de $(U_n)_n$ égale à $\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\overline{A_k}$

1.1 Montrons que $A\subset\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\overline{A_k}$.

Soit $a\in A$ une valeur d'adhérence de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\forall V\in\mathcal{V}(a); \forall n\in\mathbb{N}, \exists n_0\geq n : U_{n_0}\in V$

donc $\forall V\in\mathcal{V}(a) ; V\cap A_k\neq\emptyset, \forall k\in\mathbb{N} \Rightarrow \forall k\in\mathbb{N}, a\in\overline{A_k}$ (a adhérente à A_k)

$\Rightarrow a\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\overline{A_k} \Rightarrow A\subset\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\overline{A_k}$

1.2 Montrons que $\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\overline{A_k}\subset A$.

Soit $l\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\overline{A_k}$ ici $\forall k\in\mathbb{N} ; l\in\overline{A_k} \Rightarrow \forall k\in\mathbb{N} ; \forall V\in\mathcal{V}(l) : V\cap A_k\neq\emptyset$

$\Rightarrow \forall k\in\mathbb{N}, \forall V\in\mathcal{V}(l), \exists n_0\geq k : U_{n_0}\in A_k$

$\Rightarrow \forall V\in\mathcal{V}(l), \forall k\in\mathbb{N}, \exists n_0\geq k : U_{n_0}\in A_k$

$\Rightarrow l$ est une valeur d'adhérence de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\Rightarrow \bigcap_{k\in\mathbb{N}}\overline{A_k}\subset A$

② On déduit que $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bar{A}_k$ est fermé

on a : $\bar{A}_k$ est un fermé (car l'adherence est exactement la fermeture)
et on sait que l'intersection quelconque des fermés est un fermé, alors

$\overline{\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bar{A}_k}$ est un fermé.

EXO 3

(X, τ) et (Y, τ') deux espace topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application
Montrons que : f continue $\Longleftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(X) : f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

① $\Longrightarrow$) Soit $A \subset X$ et $x \in \bar{A}$

D'une part la continuité de f en x donne :

$\forall W \in \mathcal{V}(f(x)), \exists U \in \mathcal{V}(x) ; f(U) \subset W$ — (*)

D'autre part $x \in \bar{A}$ (càd $f(x) \in f(\bar{A})$) donne :

$\forall U \in \mathcal{V}(x), U \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow \forall U \in \mathcal{V}(x), f(U \cap A) \neq \emptyset$ (f est une application de X dans Y)

mais $f(U \cap A) \subset f(U) \cap f(A)$

donc $f(U) \cap f(A) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \forall U \in \mathcal{V}(x) : f(U) \cap f(A) \neq \emptyset$

et comme $f(U) \subset W$, alors $W \cap f(A) \neq \emptyset$ — (**)

De (*) et (**) on trouve :

$\forall W \in \mathcal{V}(f(x)) ; W \cap f(A) \neq \emptyset$

$\Rightarrow f(x) \in \overline{f(A)}, \forall x \in \bar{A}$

$\Rightarrow f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

② $\Longleftarrow$) On veut montrer que :

$\Big[\underbrace{f(x) \in f(\bar{A}) \Rightarrow f(x) \in \overline{f(A)}}_{P}\Big]$ est verifié alors $\big[f$ est continue$\big]$

On a : $f(x) \in f(\bar{A}) \Leftrightarrow x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{V}(x) : U \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow \forall U \in \mathcal{V}(x) ; f(U \cap A) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \forall U \in \mathcal{V}(x) : f(U) \cap f(A) \neq \emptyset$

car $f(U) \cap f(A) \supset f(U \cap A)$

$\Rightarrow \forall f(U) ; f(U) \cap f(A) \neq \emptyset$

On a aussi :

$f(x) \in \overline{f(A)} \Leftrightarrow \forall W \in \mathcal{V}(f(x)) ; W \cap f(A) \neq \emptyset$

Donc la proposition $\underline{P}$ devient comme suit

$\underline{P} ; \forall f(U) : f(U) \cap f(A) \neq \emptyset \Rightarrow \forall W \in \mathcal{V}(f(x)) : W \cap f(A) \neq \emptyset$

Si cette dernière proposition est vraie, alors forcement il doit se vérifie que : $W \subset f(U)$

c.à.d : $\forall W \in \mathcal{V}(f(x)), \exists U \in \mathcal{V}(x) ; f(U) \subset W$

mais cette dernière expression est exactement la définition de la continuité, ce qui fait la démonstration.

EXO 5 :

(X, τ) un espace topologique et $A \subset X$.

I) Montrons : $A \in \tau \Leftrightarrow$ Tout ouvert de (A, τ_A) est un ouvert de (X, τ)

$\Rightarrow)$

On a : $A \in \tau$ et soit $\theta \in \tau_A$ donc $\theta = A \cap O$, $O \in \tau$

et comme $A \in \tau$ et $O \in \tau$ et d'après la définition de la topologie il résult que $A \cap O \in \tau$ donc $\theta \in \tau$

c.à.d tout ouvert de τ_A est un ouvert de τ

$\Leftarrow)$ On a : tout ouvert de τ_A est un ouvert de τ, et comme A est un ouvert de τ_A ($A = A \cap X$), alors A est un ouvert de τ

c.à.d $A \in \tau$.

II) Montrons : A est un fermé de $X \iff$ tout fermé de $\mathcal{T}_A$ est un fermé de $\mathcal{T}$

$\Rightarrow$) On a A est un fermé de X, et soit F un fermé de $\mathcal{T}_A$ càd

$$F = C_A\theta,\ \theta \in \mathcal{T}_A \Rightarrow F = C_A[A \cap \theta],\ \theta \in \mathcal{T}$$

$$\Rightarrow F = A - (A \cap \theta) = A - \theta = A \cap C_X\theta$$

On a donc $F = A \cap C_X\theta,\ \theta \in \mathcal{T}$

mais A est un fermé de X et $C_X\theta$ est un fermé de X (car $\theta \in \mathcal{T}$)

donc $A \cap C_X\theta$ est un fermé de X (l'intersection de 2 fermé est un fermé)

ce qui fait que F est un fermé de X.

Donc tout fermé de $\mathcal{T}_A$ est un fermé de $\mathcal{T}$ (ou de X) (ou de $(X, \mathcal{T})$)

$\Leftarrow$)

On a tout fermé de $(A, \mathcal{T}_A)$ est un fermé de $(X, \mathcal{T})$, et en particulier A est un fermé de $(A, \mathcal{T}_A)$, alors est un fermé de $(X, \mathcal{T})$ i.e : A est un fermé de X

EXO 6

Montrons que : tout sous-espace topologique d'un espace topologique séparé, est un espace séparé.

Soit $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique séparé, et soit $(A, \mathcal{T}_A)$ est un sous-espace de $(X, \mathcal{T})$ (càd $A \subset X$).

Rappel : $(X, \mathcal{T})$ est séparé $\iff \forall x, y \in X$; $x \neq y$ $\exists U \in \mathcal{V}(x), \exists U' \in \mathcal{V}(y) : U \cap U' = \emptyset$

Maintenant on suppose que $(X, \mathcal{T})$ est séparé et on montre que $(A, \mathcal{T}_A)$ est séparé :

Soit $x, y \in A \Rightarrow x, y \in X$ et comme X est séparé alors $\exists U_1 \in \mathcal{V}(x)$ et $\exists U_2 \in \mathcal{V}(y)$ tq $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

mais $U_1 \cap U_2 = \emptyset \Rightarrow (U_1 \cap A) \cap (U_2 \cap A) = \emptyset$

on pose $U = U_1 \cap A$ et $U' = U_2 \cap A$, alors U et U' sont des voisinage de x et y dans $(A, \mathcal{T}_A)$ qui vérifient $U \cap U' = \emptyset$ i.e : $\exists U \in \mathcal{V}(x), \exists U' \in \mathcal{V}(y) : U \cap U' = \emptyset$ dans $(A, \mathcal{T}_A)$, ce qui veut dire que $(A, \mathcal{T}_A)$ est séparé

Exo 7

Soient (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) deux espace topologique et $X = X_1 \times X_2$

Montrons que X séparé $\Leftrightarrow$ X_1 et X_2 sont les deux séparés

I) $\Rightarrow$) on a

X séparé $\Leftrightarrow \forall (x_1, x_2); (y_1, y_2) \in X = X_1 \times X_2$;

$$\exists U \in \mathcal{V}(x_1, x_2), \exists U' \in \mathcal{V}(y_1, y_2) \text{ tq } U \cap U' = \phi$$

mais comme U est un voisinage (x_1, x_2) dans $X_1 \times X_2$, alors

$U = U_{x_1} \times U_{x_2}$ tq $U_{x_1} \in \mathcal{V}(x_1)$ dans X_1 et $U_{x_2} \in \mathcal{V}(x_2)$ dans X_2

même chose pour U' : $U' = U_{y_1} \times U_{y_2}$ tq $U_{y_1} \in \mathcal{V}(y_1)$ dans X_1 et $U_{y_2} \in \mathcal{V}(y_2)$ dans X_2

I-1) Montrons que X_1 est séparé :

Soient $x_1 \neq y_1 \in X_1$ et $z \in X_2$, donc $(x_1, z) \neq (y_1, z) \in X_1 \times X_2$

et comme $X_1 \times X_2$ est séparé, alors $\exists U \in \mathcal{V}(x_1, z), \exists U' \in \mathcal{V}(y_1, z)$ tq

$U \cap U' = \phi$ càd $(U_{x_1} \times U_z) \cap (U_{y_1} \times U_z) = \phi$

$$\Rightarrow U_{x_1} \cap U_{y_1} = \phi$$

On résume : pour tout $x_1 \neq y_1 \in X_1$, $\exists U_{x_1} \in \mathcal{V}(x_1), \exists U_{y_1} \in \mathcal{V}(y_1) : U_{x_1} \cap U_{y_1} = \phi$

$\Rightarrow X_1$ est séparé

I.2 Montrons que X_2 est séparé

Soient $x_2 \neq y_2 \in X_2$ et $z \in X_1$, donc $(z, x_2) \neq (z, y_2) \in X_1 \times X_2$

et comme $X_1 \times X_2$ est séparé, alors $\exists U \in \mathcal{V}(z, x_2), \exists U' \in \mathcal{V}(z, y_2)$ tq

$U \cap U' = \phi$ càd $\left.\begin{array}{l}\exists U_{x_2} \in \mathcal{V}(x_2), \exists U_z \in \mathcal{V}(z) \\ \exists U_{y_2} \in \mathcal{V}(y_2)\end{array}\right\}$ tq $\begin{cases} U = U_{x_2} \times U_z ; U' = U_{y_2} \times U_z \\ \text{et } (U_z \times U_{x_2}) \cap (U_z \times U_{y_2}) = \phi \end{cases}$

mais l'expression $(U \times U) \cap (U \times U) = \phi$ implique que $U_{x_2} \cap U_{y_2} = \phi$

ce qui donne que : $\forall x_2 \neq y_2 \in X_2, \exists U_{x_2} \in \mathcal{V}(x_2), \exists U_{y_2} \in \mathcal{V}(y_2) : U_{x_2} \cap U_{y_2} = \phi$

et ça veut dire que X_2 est séparé.

II) ($\Leftarrow$)

On a X_1 et X_2 sont séparés. Montrons que $X_1 \times X_2$ est séparé.

Soit $(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$, donc au moins $x_1 \neq y_1$ (ou $x_2 \neq y_2$)

mais comme X_1 est séparé, alors $\exists\, U_{x_1} \in \mathcal{V}(x_1)$ et $U_{y_1} \in \mathcal{V}(y_1)$ tq :

$$U_{x_1} \cap U_{y_1} = \emptyset \Rightarrow (U_{x_1} \times U_{x_2}) \cap (U_{y_1} \times U_{y_2}) = \emptyset$$

$$\Rightarrow U \cap U' = \emptyset \quad \text{tq} \begin{cases} U = U_{x_1} \times U_{x_2} \in \mathcal{V}(x_1, x_2) \\ U' = U_{y_1} \times U_{y_2} \in \mathcal{V}(y_1, y_2) \end{cases}$$

donc pour tout $(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)$, $\exists U \in \mathcal{V}(x_1, x_2)$, $\exists U' \in \mathcal{V}(y_1, y_2)$ tq

$$U \cap U' = \emptyset$$

$\Rightarrow X_1 \times X_2$ est séparé.

EX 08

(X, τ) et (Y, τ') deux espaces topologiques. Montrons que $X \times Y$ et $Y \times X$ sont homeomorphes :

Les deux espaces produits $X \times Y$ et $Y \times X$ sont homeomorphes (par définition) ssi il existe une application f de $X \times Y$ dans $Y \times X$ tq f bijective et f et f^{-1} sont continues.

Soit $f : X \times Y \longrightarrow Y \times X$; $f(x, y) = (y, x)$

a) Montrons que f est bijective :

a1) f est surjective car $\forall (y, x) \in Y \times X$, $\exists (x, y) \in X \times Y$ tq $f(x, y) = (y, x)$

a2) f est injective car :

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Rightarrow (y_1, x_1) = (y_2, x_2) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y_2 \\ x_1 = x_2 \end{cases} \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

Et comme f est bijective, alors f^{-1} existe et $f^{-1}(y, x) = (x, y)$

b) Montrons que f est continue :

f est continue ssi l'image réciproque de tout ouvert de $Y \times X$ est un ouvert de $X \times Y$.

Si Θ est un ouvert de $Y\times X$, alors $\Theta = O' \times O$ tq $O' \in \mathcal{T}'$ et $O' \in \mathcal{T}$.

Son image réciproque $f^{-1}(O'\times O) = O \times O'$ (car $f^{-1}(y,x) = (x,y)$)

mais $O\times O'$ est un ouvert de $X\times Y$. Donc f est continue de $X\times Y$ dans $Y\times X$

c) Montrons que f^{-1} est continue :

f^{-1} est définie de $Y\times X$ dans $X\times Y$. Soit Ω un ouvert de $X\times Y$, donc

$\Omega = \omega \times \omega'$ tq $\omega \in \mathcal{T}$ et $\omega' \in \mathcal{T}'$

Son image réciproque par f^{-1} est $(f^{-1})^{-1}(\Omega) = f(\Omega) = f(\omega\times\omega') = \omega'\times\omega$

(car $f(x,y) = (y,x)$), mais $\omega'\times\omega$ est un ouvert de $Y\times X$ ce qui veut

dire que f^{-1} est continue.

De a), b) et c) les deux espaces produits $X\times Y$ et $Y\times X$ sont homeomorphes.

EXO 9

$(E,\mathcal{T})$ un espace Topologique et $\Delta := \{(x,x),\ x \in E\}$.

Montrons que E est séparé $\Leftrightarrow$ Δ est fermé dans E^2

$\Rightarrow)$

On a E est séparé, et soit $(x,y) \in E^2 - \Delta$ (càd $x \neq y$).

Puisque E est séparé, alors $\exists\, U_x \in \mathcal{V}(x)$, $\exists\, U_y \in \mathcal{V}(y)$ tq $U_x \cap U_y = \phi$,

donc $U_x \times U_y \cap \Delta = \phi$ (car $U_x\times U_y \cap \Delta \neq \phi$ implique $U_x \cap U_y \neq \phi$.)

mais $U_x \times U_y \in \mathcal{V}(x,y)$.

On conclure que $\exists\, U = U_x \times U_y \in \mathcal{V}(x,y)$: $U \cap \Delta = \phi$

càd $\forall (x,y) \in E^2 - \Delta$, $\exists\, U \in \mathcal{V}(x,y)$; $U \subset E^2 - \Delta$

Ce qui veut dire que $E^2 - \Delta$ est ouvert (est un voisinage de tous ses points.)

On déduit alors que Δ est fermé dans E^2.

$\Leftarrow)$

On a Δ est un fermé dans E^2, et soit $(x,y) \notin \Delta$ (càd $x \neq y$.)

Comme Δ est fermé, alors $E^2 - \Delta$ est ouvert. Et comme $(x,y) \in E^2 - \Delta$, alors

$\exists\, U \in \mathcal{V}(x,y)$ tq $U \subset E^2 - \Delta$, mais $U = U_x \times U_y$ tq $U_x \in \mathcal{V}(x)$ et $U_y \in \mathcal{V}(y)$

càd $U_x \times U_y \subset E^2 - \Delta$ ce qui implique $U_x \times U_y \cap \Delta = \phi$ qui donne $U_x \cap U_y = \phi$

On conclure que $\forall\, x \neq y \in E$, $\exists\, U_x \in \mathcal{V}(x)$, $\exists\, U_y \in \mathcal{V}(y)$: $U_x \cap U_y = \phi$

donc E est séparé

Exo 10

La résolution de cet exercice est similaire à celle de l'exo 9, en tenant compte que l'image réciproque d'un ouvert (voisinage) par une application continue est un ouvert (voisinage). C'est à l'étudiant de faire le reste.

IKASSOULENE.