Corrigé de TD N° 02 topologie L2-SAD

Ex 01 :

Soit $X = \{a, b, c, d\}$

$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}\}$

① Montrons que τ est une topologie sur X.

a) on remarque que ; $\emptyset, X \in \tau$

b) Montrons que $\forall A, B \in \tau ; A \cap B \in \tau$

b.1) si $A = \emptyset$, alors $A \cap B = \emptyset \in \tau$

b.2) si $A = X$, alors $A \cap B = B \in \tau$

b.3) si $A = \{a\}$, alors $A \cap B = \begin{cases} \emptyset \text{ si } a \notin B \\ \{a\} \text{ si } a \in B \end{cases} \in \tau$

b.4) si $A = \{b\}$, alors $A \cap B = \begin{cases} \emptyset \text{ si } b \notin B \\ \{b\} \text{ si } b \in B \end{cases} \in \tau$

b.5) * $\{a,b\} \cap \{a,c\} = \{a\} \in \tau$

* $\{a,b\} \cap \{b,d\} = \{b\} \in \tau$ $\quad (A = \{a,b\})$
* $\{a,b\} \cap \{a,b,c\} = \{a,b\} \in \tau$
* $\{a,b\} \cap \{a,b,d\} = \{a,b\} \in \tau$

b.6) $\{a,c\} \cap \{a,b\} = \{a\} \in \tau$ $\quad (A = \{a,c\})$

$\{a,c\} \cap \{a,b,c\} = \{a,c\} \in \tau$

$\{a,c\} \cap \{a,b,d\} = \{a\} \in \tau$

b.7) $\{b,d\} \cap \{a,b,c\} = \{b\} \in \tau$ $\quad (A = \{b,d\})$

$\{b,d\} \cap \{a,b,d\} = \{b,d\} \in \tau$

b.8) $\{a,b,c\} \cap \{a,b,d\} = \{a,b\} \in \tau$ $\quad (A = \{a,b,c\})$

donc l'intersection est stable dans τ.

c) Montrons que $\forall A, B \in \tau ; A \cup B \in \tau$

c.1) si $A = \emptyset$, alors $A \cup B = B \in \tau$

c.2) si $A = X$; alors $A \cup B = X \in \tau$

c.3) si $A = \{a\}$.

* $\{a\} \cup \{b\} = \{a,b\} \in \tau$ / * $\{a\} \cup \{a,b\} = \{a,b\} \in \tau$
* $\{a\} \cup \{a,c\} = \{a,c\} \in \tau$ / * $\{a\} \cup \{b,d\} = \{a,b,d\} \in \tau$

* $\{a\} \cup \{a,b,c\} = \{a,b,c\} \in \tau$ / * $\{a\} \cup \{a,b,d\} = \{a,b,d\} \in \tau$

donc τ est stable par l'union.

De a), b) et c) on conclure que τ est une topologie dans X.

1.2) Les ouverts de τ sont : $\emptyset, X$; $\{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,d\}$
$\{a,b,c\}, \{a,b,d\}$.

1.3) Les fermés de τ sont : (fermé = complément d'un ouvert)

$X ; \emptyset, \{b,c,d\}, \{a,c,d\}, \{c,d\}, \{b,d\}, \{a,c\}, \{d\}, \{c\}$.

② Déterminons les ensembles suivants :

* $\overset{\circ}{\widehat{\{b,c\}}} = \{b\}$; $\overline{\{b,c\}} = \{b,c,d\}$
* $\overset{\circ}{\widehat{\{c,d\}}} = \emptyset$; $\overline{\{c,d\}} = \{c,d\}$
* $\overset{\circ}{\widehat{\{b,c,d\}}} = \{b,d\}$; $\overline{\{b,c,d\}} = \{b,c,d\}$
* $Fr(\{b,c,d\}) = \overline{\{b,c,d\}} - \overset{\circ}{\widehat{\{b,c,d\}}} = \{b,c,d\} - \{b,d\} = \{c\}$

EX02 :

On a $E =]0,+\infty[$ et $\tau = \{\emptyset, O_\alpha / \alpha \geq 0\}$ tq $O_\alpha =]\alpha, +\infty[$

① Montrons que τ est une topologie sur E

a) on remarque $\emptyset \in \tau$ et $E = O_0 \in \tau$

b) Montrons que $\forall A, B \in \tau ; A \cap B \in \tau$

b.1) si $A = \emptyset$, alors $A \cap B = \emptyset \in \tau$

b.2) si $A = O_{\alpha_1}$ et $B = O_{\alpha_2}$, alors $A \cap B = O_\alpha (\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2)) \in \tau$

c) Montrons que $\forall A_i \in \tau ; \bigcup_i A_i \in \tau$

$\bigcup_i A_i = \bigcup_i O_{\alpha_i} = O_\alpha (\alpha = \inf(\alpha_i)) \in \tau$ [car $\alpha_i \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \alpha \in \mathbb{R}^+$]

on conclure que τ est une topologie sur E

② Déterminons les fermés de $(E, \mathcal{T})$

les ouverts de de $(E, \mathcal{T})$ sont les intervalles $]\alpha, +\infty[$ ou ϕ $_{\alpha \geq 0}$

les fermés sont leurs compléments à $E =]0, +\infty[$, donc

les fermés de $(E, \mathcal{T})$ sont : $]0, \alpha]$ $_{\alpha \geq 0}$ et $E =]0, +\infty[$

③ Donnons $\mathring{A}$ et $\bar{A}$ dans chaque cas des cas suivants :

3.1 $A =]0, 1[$; $\mathring{A} = \phi$; $\bar{A} =]0, 1]$

3.2 $A = [\frac{1}{2}, +\infty[$; $\mathring{A} =]\frac{1}{2}, +\infty[$; $\bar{A} = E =]0, +\infty[$

3.3 $A = \mathbb{N}$; $\mathring{A} = \emptyset$; $\bar{A} =$

④ Montrons que $(E, \mathcal{T})$ n'est pas séparé

Soit $a, b \in E$ tq $a < b$, tous les ouverts qui contient a sont de la forme $O_1 =]\alpha_1, +\infty[$ $_{0 \leq \alpha_1 < a}$; et de même tous les ouverts qui contient b sont de la forme $O_2 =]\alpha_2, +\infty[$ $_{0 \leq \alpha_1 < b}$. Ce qui implique $O_1 \cap O_2 \neq \phi$

donc chaque voisinage de a rencontre chaque voisinage de b

ce que veut dire que $(E, \mathcal{T})$ n'est pas séparé.

EXO 3 :

On a $E =]0, +\infty[$ et $\mathcal{T} = \{E, \Theta_\alpha =]0, \alpha[\}_{\alpha \geq 0}$

① Montrons que $(E, \mathcal{T})$ est un espace topologique

a) on remarque que $E \in \mathcal{T}$ et ϕ $\Theta_0 =]0, 0[\in \mathcal{T}$ $(\alpha = 0)$

b) soient $A, B \in \mathcal{T}$

b.1 Si $A = \phi$, alors $A \cap B = \phi \in \mathcal{T}$

b.2 Si $A = E$ alors $A \cap B = B \in \mathcal{T}$

b.3 Si $A = \Theta_{\alpha_1}$ et $B = \Theta_{\alpha_2}$, alors $A \cap B = \Theta_\alpha$ $(\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2))$ $]0, \alpha[\in \mathcal{T}$

c) Soit $(A_i)_{i \in I} = (\Theta_{\alpha_i})_{i \in I} \subset \mathcal{T}$, alors $\bigcup_{i \in I} \Theta_i = \Theta_\alpha (\alpha = \sup(\alpha_i)) =]0, \alpha[\in \mathcal{T}$

D'où, $(E, \mathcal{T})$ est un espace topologique.

② Les fermés de $(E, \mathcal{T})$ sont les complements de ses ouverts :

$\emptyset, E, [\alpha, +\infty[= F_\alpha$
$\alpha > 0$

③ 3.1 Si $A =]0,1[$; $\mathring{A} =]0,1[$; $\bar{A} = E$

3.2 Si $A = \{\frac{2}{3}\}$; $\mathring{A} = \emptyset$; $\bar{A} = F_{2/3} = [\frac{2}{3}, +\infty[$

3.3 Si $A = \mathbb{N}^*$; $\mathring{A} = \emptyset$; $\bar{A} = [1, +\infty[$

EXO 4 :

① Montrons que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X

on a $(\mathcal{O} \in \mathcal{T}) \Leftrightarrow (C_X \mathcal{O}$ est fini) ; par définition

a) on a $\emptyset \in \mathcal{T}$ (par définition) et $C_X X = \emptyset$ fini, alors $X \in \mathcal{T}$

b) soit $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow C_X \mathcal{O}_1$ et $C_X \mathcal{O}_2$ sont finis $\Rightarrow C_X \mathcal{O}_1 \cup C_X \mathcal{O}_2$ est fini, mais $C_X \mathcal{O}_1 \cup C_X \mathcal{O}_2 = C_X(\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2)$, alors $C_X(\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2)$ est fini

donc $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}$.

c) Soit $(\mathcal{O}_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T} \Rightarrow C_X \mathcal{O}_i$ est fini $\forall i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I}(C_X \mathcal{O}_i)$ est fini

mais $\bigcap_{i \in I}(C_X \mathcal{O}_i) = C_X(\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i)$, alors $C_X(\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i)$ est fini $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \in \mathcal{T}$

D'où $(\mathcal{T}, X)$ est un espace topologique

② Lorsque X est fini ; toutes les parties de X, leurs complements sont finis, Alors toutes les parties de X sont des ouverts de $\mathcal{T}$, ce qui fait que $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ = l'ensemble de toutes les parties de X

③ Montrons que si X n'est pas fini alors n'est pas separé

Dans ce cas les ouverts de $\mathcal{T}$ sont toutes les parties infinies de X (car leurs complements sont finies)

on montre que $\exists a \neq b \in X$ tq $\forall V_a \in \mathcal{V}(a), \forall V_b \in \mathcal{V}(b)$: $V_a \cap V_b \neq \emptyset$

soit $\mathcal{O}_a$ est un ouvert qui contient a et $\mathcal{O}_b$ un ouvert qui contient b

on suppose que $\mathcal{O}_a \cap \mathcal{O}_b = \emptyset \Rightarrow \mathcal{O}_b \subset C_X \mathcal{O}_a$, mais on sait que $\mathcal{O}_b$ est infini et $C_X \mathcal{O}_a$ est fini ; ce qui donne une contradiction

(infini $\subset$ fini !!)

donc $\forall \mathcal{O}_a, \forall \mathcal{O}_b : \mathcal{O}_a \cap \mathcal{O}_b \neq \phi \Rightarrow \forall v_a, \forall v_b : v_a \cap v_b \neq \phi$

$\Rightarrow (X, \tau)$ n'est pas séparé

EXO 5 :

Soit (E, τ) un espace topologique fini et séparé, et montrons que τ est forcément la topologie discrète de E (c.à.d $\tau = \mathcal{P}(E)$) :

A)

τ est fini, alors on peut l'écrire : $\tau = \{a_1, a_2, \dots a_n\}, n < \infty$

(E, τ) est séparé, alors $\forall \underset{i \neq 1}{a_i} \in \tau, \left.\begin{matrix}\exists v_i \in \mathcal{V}(a_i) \\ \exists v_i' \in \mathcal{V}(a_1)\end{matrix}\right\}$ tq $v_i' \cap v_i = \phi$, $i = \overline{2, n}$

Soit $v' = \bigcap_{i=2}^{n} v_i'$, alors v' est un voisinage de a_1 et $v' \cap v_i = \phi$ $\forall i = \overline{2, n}$

$\Rightarrow v' \cap \left(\bigcup_{i=2}^{n} v_i\right) = \phi \Rightarrow v' \cap v = \phi$ (tq $v = \bigcup_{i=2}^{n} v_i$)

Or que v contient les elements : $a_2, a_3, \dots a_n$ et v' contient a_1 et ne rencontre pas v, alors $v' = \{a_1\}$ (et $v = \{a_2, a_3, \dots a_n\}$)

et comme v' est un ensemble qui contient un ouvert contient a_1, alors cet ouvert est l'ensemble $\{a_1\}$ elle même.

B) De même façon on montre que $\{a_i\}$ est un ouvert $\forall i = \overline{2, n}$

C) Puisque l'union quelconque des ouverts est un ouvert, alors toute partie de E est un ouvert $\Rightarrow$ τ est la famille de toutes les parties de E ($\tau = \mathcal{P}(E)$) $\Rightarrow (X, \tau)$ est un espace topologique discret.

EXO 6 :

Soit (X, τ) un espace topologique et $A, B \in \tau$

① Montrons que : $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

$\overline{B}$ est le plus petit fermé qui contient B, donc est un fermé contient A (car $A \subset B$). Et comme $\overline{B}$ est un fermé contenant A, alors il contient le plus petit fermé qui contient A i.e : $\overline{A} \subset \overline{B}$

* Remarque : l'inverse n'est pas vrai généralement

exemple : dans la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, on prend $A = [0, 1[$ et $B =]0, 1]$

il resulte que $\overline{A} = [0, 1]$ et $\overline{B} = [0, 1]$

et on a $\bar{A} \subset \bar{B}$ mais $A \not\subset B$.

② Montrons que: $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

on a $\left.\begin{array}{l} A \subset \bar{A} \\ B \subset \bar{B} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cap B \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

mais $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont des fermés, et comme l'intersection des fermés est un fermé alors $\bar{A} \cap \bar{B}$ est un fermé qui contient $A \cap B$ donc contient le plus petit fermé contenant $A \cap B$ i.e: $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

<u>exemple</u>: Dans la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ on prend:

1) $A =]0,2[$ et $B =]1,3[$

on a: $\left.\begin{array}{l} \overline{A \cap B} = \overline{]1,2[} = [1,2] \\ \text{et } \bar{A} \cap \bar{B} = [0,2] \cap [1,3] = [1,2] \end{array}\right\}$ on a: $[1,2] = [1,2]$ donc $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

2) $A =]0,2[$ et $B =]2,3[$

on a: $\left.\begin{array}{l} \overline{A \cap B} = \overline{]2,2[} = \bar{\emptyset} = \emptyset \\ \bar{A} \cap \bar{B} = [0,2] \cap [2,3] = [2,2] = \{2\} \end{array}\right\}$ on a $\emptyset \subset \{2\}$ donc $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

(l'inclusion toujours est vérifiée mais l'égalité non)

③ Montrons que $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

<u>3.1</u> $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$?

on a: $\left.\begin{array}{l} A \subset \bar{A} \\ B \subset \bar{B} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B}$

comme $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont des fermés et l'union de deux fermés est un fermé, alors $\bar{A} \cup \bar{B}$ est un fermé. Et puisque est un fermé contient $A \cup B$, alors il contient le plus petit fermé contenant $A \cup B$ i.e: $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$

<u>3.2</u> $\overline{A \cup B} \supset \bar{A} \cup \bar{B}$?

on a $\left.\begin{array}{l} A \subset A \cup B \\ \text{et } B \subset A \cup B \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{d'après ①}} \left\{\begin{array}{l} \bar{A} \subset \overline{A \cup B} \\ \bar{B} \subset \overline{A \cup B} \end{array}\right. \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$

De <u>3.1</u> et <u>3.2</u> on conclure que $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

EXO 7 :

A et B deux parties d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. Montrons que :

1) $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$

A° est le plus grand ouvert contenu dans A, donc est un ouvert contenu dans B (car $A \subset B$) et par conséquence est inclus dans le plus grand ouvert contenu dans B i.e : $\mathring{A} \subset \mathring{B}$

exemple : dans la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, on prend $A =]0, 3]$ et $B = [-1, 4]$, on remarque $A \subset B$ et on trouve que $A^\circ =]0, 3[$ et $\mathring{B} =]-1, 4[\Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$

Remarque : le contraire n'est pas vrai en général

exemple : dans la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, on prend

$A = [0, 1]$ et $B =]0, 2]$ donc $A^\circ =]0, 1[$ et $B^\circ =]0, 2[$

On remarque $A^\circ \subset B^\circ$ mais $A \not\subset B$

2) $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$?

2.1 Montrons que $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$

On a $\left.\begin{array}{l} A \cap B \subset A \\ \text{et } A \cap B \subset B \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{D'après 1)}} \left.\begin{array}{l} \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \subset \mathring{A} \\ \text{et } \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \subset \mathring{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \subset A^\circ \cap \mathring{B}$

2.2 Montrons que $A^\circ \cap \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$?

On a $\left.\begin{array}{l} A^\circ \subset A \\ B^\circ \subset B \end{array}\right\} \Rightarrow A^\circ \cap B^\circ \subset A \cap B$

comme A° et B° sont des ouverts, alors $A^\circ \cap B^\circ$ est un ouvert, et en plus est contenu dans $A \cap B$ (car $A^\circ \cap B^\circ \subset A \cap B$), ce qui fait qu'il est contenu dans le plus grand ouvert de $A \cap B$ i.e : $A^\circ \cap \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$

3) $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$?

On a : $\left.\begin{array}{l} A^\circ \subset A \\ \text{et } B^\circ \subset B \end{array}\right\} \Rightarrow A^\circ \cup B^\circ \subset A \cup B$

l'union de deux ouverts est un ouvert, donc $A^\circ \cup B^\circ$ est un ouvert contenu dans $A \cup B$, et par conséquence dans le plus grand ouvert de $A \cup B$ i.e : $A^\circ \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$

exemple Dans la Topologie usuelle de $\mathbb{R}$ on prend :

$A =]0,1[$ et $B = [1,2]$, alors $\mathring{A} =]0,1[$ et $\mathring{B} =]1,2[$

et $\overset{\circ}{\widehat{A\cup B}} = \overset{\circ}{\widehat{]0,1[\cup[1,2]}} = \overset{\circ}{\widehat{]0,2]}} =]0,2[$

On remarque que : $\mathring{A}\cup\mathring{B} =]0,1[\cup]1,2[\subset \overset{\circ}{\widehat{A\cup B}} =]0,2[$

mais le contraire est faux : $\overset{\circ}{\widehat{A\cup B}} =]0,2[\not\subset \mathring{A}\cup\mathring{B} =]0,1[\cup]1,2[$

Exo8 :

Soit A une partie d'un espace Topologique (X,τ), Montrons que :

1) $C_X\bar{A} = \overset{\circ}{\widehat{C_XA}}$ (on montre les deux inclusions)

2) $C_X\mathring{A} = \overline{C_XA}$ (" " " ")

3) $Fr(A) = \bar{A}\cap\overline{C_XA}$

La définition de la frontière de A, $Fr(A)$, d'après le cours est : $Fr(A) = \bar{A}/A^{\circ}$

donc on montre que $\bar{A}/A^{\circ} = \bar{A}\cap\overline{C_XA}$

D'abord on a : $x\in\mathring{A} \Leftrightarrow \exists\, v\in\mathcal{V}(x),\ v\subset A$

donc $x\notin\mathring{A} \Leftrightarrow \forall\, v\in\mathcal{V}(x),\ v\not\subset A$

$\Leftrightarrow \forall\, v\in\mathcal{V}(x)\ v\cap C_XA\neq\emptyset$

$\Leftrightarrow x\in\overline{C_XA}$ ---- (*)

D'autre part on a :

$x\in\bar{A}/A^{\circ} \Leftrightarrow x\in\bar{A}$ et $x\notin A^{\circ}$

$\Leftrightarrow x\in\bar{A}$ et $x\in\overline{C_XA}$ (d'après (*))

$\Leftrightarrow x\in\bar{A}\cap\overline{C_XA}$

Ce qui veut dire que $\bar{A}/A^{\circ} = \bar{A}\cap\overline{C_XA}$.

Exo12 :

Soit (X,τ) un espace Topologique, et soit D une partie de X

Montrons que D dense dans $X \Leftrightarrow \forall\, \underset{(O\neq\emptyset)}{O}\in\tau;\ O\cap D\neq\emptyset$!

Par définition D est dense dans $X \Leftrightarrow \bar{D} = X \Leftrightarrow \forall x\in X,\ \forall v\in\mathcal{V}(x);\ v\cap D\neq\emptyset$

$\Leftrightarrow \forall\, \underset{O\neq\emptyset}{O}\subset X,\ O\cap D\neq\emptyset \Leftrightarrow \forall\, O\in\tau,\ O\cap D\neq\emptyset$.

Ex14 :

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soient A, B deux parties de X.

Montrons que :

1) $Fr(\bar{A}) \subset Fr(A)$

1.1) Montrons d'abord que $\mathring{\bar{A}} \supset \mathring{A}$

On a $A^\circ \subset A \subset \bar{A}$, donc A° est un ouvert inclu dans $\bar{A}$ donc est inclu dans le plus grand ouvert de $\bar{A}$ cad $\mathring{A} \subset \mathring{\bar{A}}$

1.2) On a $\left.\begin{array}{l}\overline{(\bar{A})} = \bar{A} \\ \mathring{\bar{A}} \supset \mathring{A}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{(\bar{A})} - \mathring{\bar{A}} \subset \bar{A} - A^\circ$

$\Rightarrow Fr(\bar{A}) \subset Fr(A)$

2) Montrons que $Fr(\mathring{A}) \subset Fr(A)$

D'abord on a : chaque point adhérent à A° est adhérent à A (car $A^\circ \subset A$)

donc $\overline{\mathring{A}} \subset \bar{A}$

D'autre part on a : $\left.\begin{array}{l}\overset{\circ}{\overbrace{(A^\circ)}} = A^\circ \\ \text{et } \overline{A^\circ} \subset \bar{A}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{\mathring{A}} - \mathring{\mathring{A}} \subset \bar{A} - A^\circ$

$\Rightarrow Fr(A^\circ) \subset Fr(A)$

3) Montrons que $Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$

a) on a montré dans exo 6 que $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

b) " " " exo 7 que $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$

c) De a) et b) on a : $\begin{cases}\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B} \\ \text{et} \\ \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \supset A^\circ \cup B^\circ\end{cases} \Rightarrow \overline{A \cup B} - \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \subset \bar{A} \cup \bar{B} - \mathring{A} \cup \mathring{B}$

donc $Fr(A \cup B) = \overline{A \cup B} - \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \subset \bar{A} \cup \bar{B} - A^\circ \cup B^\circ$

$= [\bar{A} - (A^\circ \cup B^\circ)] \cup [\bar{B} - (A^\circ \cup B^\circ)]$

$\subset [\bar{A} - \mathring{A}] \cup [\bar{B} - B^\circ]$ car $\begin{cases} A^\circ \subset A^\circ \cup B^\circ \\ B^\circ \subset A^\circ \cup B^\circ\end{cases}$

$= Fr(A) \cup F(B)$.

donc $Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$.

EXO 18:

1) Justifions que $\mathbb{R}$ (muni de sa topologie usuelle) est séparable.

Un espace topologique X est séparable s'il existe une partie $A \subset X$ qui soit dénombrable et dense partout.

On prend $A = \mathbb{Q}$ l'ensemble des nombre rationnels,

$\mathbb{Q}$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$, donc $\mathbb{R}$ est séparable

2) Soit (X, τ) un espace topologique, et supposons qu'il existe une base $\mathcal{B}$ pour τ qui soit dénombrable. Montrons que X est séparable:

* puisque $\mathcal{B}$ est dénombrable, alors on peut écrire $\mathcal{B}$ comme suit:

$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, \dots\} / B_i \in \tau \ \forall i = 1, 2, \dots$

* Soit l'ensemble $A = \{a_i, i = 1, 2, \dots\}$ tq $a_i \in B_i$, alors A est dénombrable

* Montrons que A est dense dans X:

Soit $x \in X$ et $V \in \mathcal{V}(x)$, et O est un ouvert tq $O \subset V$ et $x \in O$.

comme $\mathcal{B}$ est une base de X, alors $O = \bigcup_{i \in I} B_i$. Donc il existe au moins un a_j $(j \in I)$ tq $a_j \in A$ et $a_j \in O$, ce qui donne $O \cap A \neq \emptyset$.

Ça veut dire que $\forall x \in X$; $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, V rencontre A. Alors A est dense partout dans X $(\bar{A} = X)$

* Finalement: comme il existe un ensemble A dénombrable et dense partout dans X, alors X est séparable.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

EXO 1 :

Soit $1 \in X \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, X\}$

Est-ce que $(X, \mathcal{T})$ est un espace Topologique ?

EXO 2

(1) Dans la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, les ensemble suivants sont : ouverts ? fermés ? les deux ? ni l'un ni l'autre ?

$A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 < 9\}$; $C = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 9\}$

(2) Dans la topologie usuelle de $\mathbb{R}^2$, les ensembles suivants sont : ouverts ? fermé ? les deux ? ni l'un ni l'autre ?

$A = \{(\frac{1}{n}, y) / n \in \mathbb{N}^*, y \in [0, 1]\}$

$B = \{(x, \arctan x) / x \in \mathbb{R}\}$

$C = \{(x, y) \in \mathbb{R} / 1 < x^2 + y^2 < 2\}$

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$

$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2 + y^2 < 2\}$

$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < y\}$

EXO 3

Dans la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ déterminer l'adhérence et l'intérieur des ensembles suivants ;

$A = \mathbb{Q}$; $B = \mathbb{R} / \mathbb{Q}$; $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 1, y = 0\}$

$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\}$; $E = \{\frac{1}{n}, n \geq 1\}$;

$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$; $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$

$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x^2 + y^2 < 1\}$

$I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1 \text{ et } y \neq 0\}$

Corrigé

Exo 1 :

On a 1) $\emptyset \in \tau$; $X \in \tau$

2) $\emptyset \cap \{1\} \in \tau$; $\emptyset \cap X \in \tau$; $\{1\} \cap X = \{1\} \in \tau$

3) $\emptyset \cup \{1\} = \{1\} \in \tau$; $\emptyset \cup X = X \in \tau$; $\{1\} \cup X = X \in \tau$

Donc (X, τ) est un espace topologique

Exo 2 :

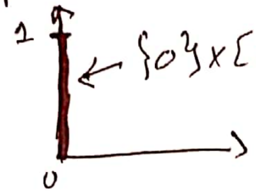
① * A ni ouvert ni fermé : n'est pas ouvert car n'est pas ~~somme~~ réunion des intervalles. n'est pas fermé car son adhérence $\bar{A} = A \cup \{0\} \neq A$

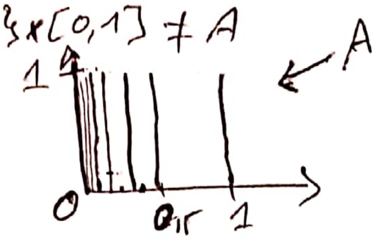
(A est fermé $\Leftrightarrow \bar{A} = A$)

* $B =]-3, +3[\Rightarrow B$ est ouvert

* $C = \{-3, +3\} = [-3, -3] \cup [+3, +3] \Rightarrow$ fermé

② * A ni ouvert ni fermé : n'est pas ouvert car A n'est pas un réunion des ouverts de $\mathbb{R}^2$. n'est pas fermé car $\bar{A} = A \cup \{0\} \times [0,1] \neq A$

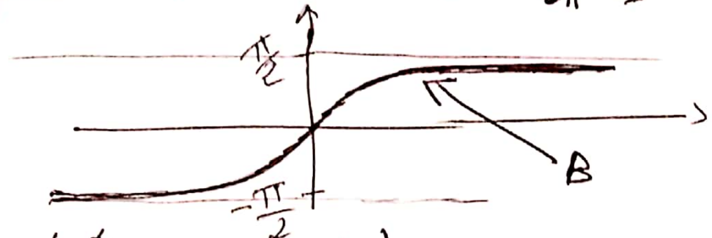




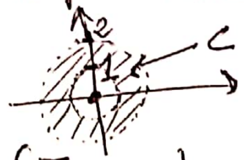
* B est fermé car

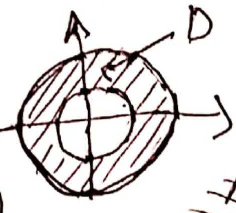
$C_{\mathbb{R}^2}^{B} = \mathbb{R}^2 / B$ est ouvert

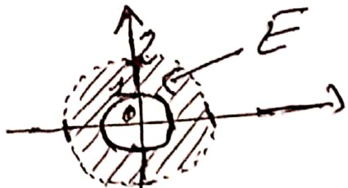
(car $\mathbb{R}^2 / B$ est un voisinage de tous ses points.)



* C est un ouvert







* D est un fermé ($\bar{D} = D$)

* E ni ouvert ni fermé ($\bar{D} \neq D$ et $\mathring{D} \neq D$)

* F ouvert (car $\mathring{F} = F$ ou $\forall x \in F, \exists U \in V(x), U \subset F$)

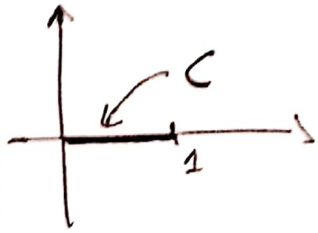
Exo 3 :

$\mathring{A} = \emptyset$ (pas d'intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans $\mathbb{Q}$)

$\bar{A} = \mathbb{R}$ (Tous les points de $\mathbb{R}$ sont adhérent à $\mathbb{Q}$)

$\mathring{B} = \emptyset$ $\}$ même justification précédente

$\bar{B} = \mathbb{R}$



$\mathring{C} = \emptyset$ (pas d'ouvert de $\mathbb{R}^2$ est inclus dans C i.e : pas de carré ou boule ouverts est inclus dans C)

$\bar{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le x \le 1, y = 0\} = [0,1] \times \{0\}$

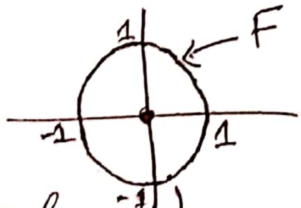
D : est un plan dans $\mathbb{R}^3$ orthogonal à l'axe $(x x')$ en point $(0,0,0)$

$\mathring{D} = \emptyset$ (pas d'ouvert de $\mathbb{R}^3$ est inclus dans D)

$\bar{D} = D$ (tous les points - et seuls les points - de D sont adhérent à D)

$\mathring{E} = \emptyset$ (pas d'intervalle est inclus dans E)

$\bar{E} = E \cup \{0\}$ (zero est la seule valeur de $\mathbb{R}$ qui est adhérent à E)



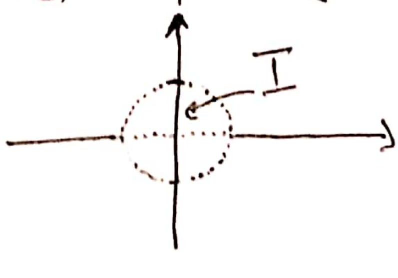
$\mathring{F} = \emptyset$ (pas d'ouvert de $\mathbb{R}^2$ est dans F)

$\bar{F} = F$ (les points adhérent à F sont ceux de F seulement)

$\mathring{G} = G$ (car G est un ouvert. ou car G est un voisinage de tous ses points)

$\bar{G} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \le 1\} = G \cup \mathcal{C}(0,1)$

$\mathring{H} = H$; $\bar{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le x^2 + y^2 \le 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \le 1\}$



$\mathring{I} = I$; $\bar{I} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \le 1\}$

 Mr. IKASSOULENE