Corrigé de série N° 3, Probabilités, L3-Informatique

Ex 01 :

1) $E(X) = \sum_{x \in S(X)} x P(X=x) = 0\times 0,1 + 1\times 0,3 + 2\times 0,4 + 3\times 0,1 + 4\times 0,05 + 5\times 0,05$

$$\boxed{E(X) = 1,85}$$

* $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$= \sum_{x \in S(X)} x^2 P(X=x) - E(X)^2$

$= (0^2\times 0,1 + 1^2\times 0,3 + 2^2\times 0,4 + 3^2\times 0,1 + 4^2\times 0,05 + 5^2\times 0,05) - (1,85)^2$

$= 4,85 - 1,85$

$$\boxed{V(X) = 3}$$

2) On a $Y = 3X - 5$

* $E(Y) = 3E(X) - 5 = 3\times 1,85 - 5 \Rightarrow \boxed{E(Y) = 0,55}$

* $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = E[(3X-5)^2] - E(Y)^2$

$V(Y) = E(9X^2 - 30X + 25) - E(Y)^2$

$V(Y) = 9E(X^2) - 30E(X) + 25 - E(Y)^2$

$V(Y) = 9\times 4,85 - 30\times 1,85 + 25 - (0,55)^2$

$$\boxed{V(Y) = 12,8475}$$

Exo 2 :

f est elle une densité ?

1) f est une densité si elle est positive et $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$

a) $\frac{3}{x^4} \geq 0 \ \forall x \in [1, +\infty[$ et $0 \geq 0 \ \forall x \in]-\infty, 1[$ donc $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{+1}^{+\infty} \frac{3}{x^4}\,dx = \left[\frac{-1}{x^3}\right]_{+1}^{+\infty} = 0-(-1) = 1$

donc f est une densité.

2) a) $xe^{-x} \geq 0 \ \forall x \in [0, +\infty[$ et $0 \geq 0 \ \forall x \in]-\infty, 0[$ donc $f(x) \geq 0$
$\forall x \in \mathbb{R}$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} xe^{-x} = \left[x(-e^{-x})\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (1)(-e^{-x})\,dx$

$= -xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 0 + [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$

donc
f est une densité.

Exo 3 :

1) Pour que f_λ soit une densité de probabilité il faut verifier :

a) $f_\lambda(t) \geq 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f_\lambda(t) \geq 0 \ \forall t \in [1, 10] \Rightarrow \lambda t^{-2} \geq 0, \forall t \in [1, 10]$

$\Rightarrow \lambda \geq 0$

b) $\int_{\mathbb{R}} f_\lambda(t) = 1 \Rightarrow \int_1^{10} \lambda t^{-2}\,dt = 1 \Rightarrow [-\lambda t^{-1}]_1^{10} = 1 \Rightarrow \frac{9\lambda}{10} = 1$

$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{10}{9}}$

2) a) $f_\lambda(t) \geq 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f_\lambda(t) \geq 0 \ \forall t \in [1, +\infty[$

$\Rightarrow \lambda t^{-2} \geq 0 \ \forall t \in [1, +\infty[\ \Rightarrow \lambda \geq 0$

b) $\int_{\mathbb{R}} f_\lambda(t)\,dt = 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} f_\lambda(t)\,dt = 1 \Rightarrow \int_{+1}^{+\infty} \lambda t^{-2}\,dt = 1$

$\Rightarrow \left[-\lambda t^{-1}\right]_{+1}^{+\infty} = 1 \Rightarrow 0 - (-\lambda) = 1 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1}$

3) $E(X)$ et $V(X)$?

3.1) Pour $f_\lambda(t) = \begin{cases} \frac{10}{9} t^{-2}, & t \in [1, 10] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$* E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) = \int_1^{10} x\left(\frac{10}{9} x^{-2}\right) dx = \int_1^{10} \frac{10}{9} x^{-1}\,dx = \frac{10}{9} \ln x\Big]_9^{10}$

$E(X) = \frac{10}{9}\left[\ln 10 - \ln 9\right] = \frac{10}{9} \ln \frac{10}{9} \Rightarrow \boxed{E(X) \simeq 0{,}11706}$

$* V(X) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} x^2\left(\frac{10}{9} x^{-2}\right) dx = \int_1^{10} \frac{10}{9}\,dx = \frac{10}{9}(10 - 1)$

$\Rightarrow \boxed{V(X) = 10}$

3.2 Pour $f_\lambda(t) = \begin{cases} t^{-2}, & t \in [1, +\infty[\\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

$* E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} x(x^{-2})\,dx = \int_1^{+\infty} x^{-1}\,dx = \left[\ln x\right]_1^{+\infty} = \infty$

donc $E(X)$ n'existe pas

$* V(X) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} x^2(1x^{-2})\,dx = \int_1^{+\infty} 1\,dx = +\infty$

$\Rightarrow V(X)$ n'existe pas

Exo 4 :

La densité f d'une loi uniforme X sur $[a,b]$ est donnée par

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc dans notre cas

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{1-0}, & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \Rightarrow f_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) On a :

$$P(t \leq 0{,}5) = F_T(0{,}5) = \int_{-\infty}^{0{,}5} f_T(t)\,dt = \int_0^{0{,}5} 1\,dt = 0{,}5 \,;$$

et donc

$$P(T > 0{,}5) = 1 - P(T \leq 0{,}5) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

2) $$P(0{,}2 < T < 0{,}6) = \int_{0{,}2}^{0{,}6} f_T(t)\,dt = \int_{0{,}2}^{0{,}6} 1\,dt = t\Big|_{0{,}2}^{0{,}6} = 0{,}4$$

3) $$P(T = 0{,}6) = \int_{0{,}6}^{0{,}6} f_T(t)\,dt = 0$$

Exo 5 :

Soit V la variable aléatoire ; la quantité d'eau dans un verre.
Par hypothèse V suit une loi uniforme sur $[0,20]$, donc

$$f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{20-0} & \text{si } v \in [0,20] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \Rightarrow f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{20} & \text{si } v \in [0,20] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) On calcule $P(V \leq 0{,}5)$

$$P(V \leq 0{,}5) = \int_{-\infty}^{0{,}5} f_V(v)\,dv = \int_0^5 \frac{1}{20}\,dv = \frac{1}{4}$$

2) Soient $V_1, V_2, \dots V_5$ les variables aléatoires correspondent (respectivement) à la quantité d'eau dans les verres : $V_1, V_2, V_3, \dots, V_5$.

* Chaque variable V_i suit une loi uniforme sur $[0, 20]$

donc $E(V_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} v f_{V_i}(v)\,dv = \int_0^{20} v f_{V_i}(v)\,dv = \int_0^{20} \frac{v}{20}\,dv \Rightarrow$

$$E(V_i) = \frac{1}{20}\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^{20} = 10$$

qu'est la quantité moyenne (espérée) obtient dans le verre V_i

* La quantité moyenne (espérée) obtient ~~dans~~ la bassine par les 5 verres est $E(V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5)$.

Mais par la linéarité de l'espérance on a

$$E(V_1 + \dots + V_5) = E(V_1) + E(V_2) + \dots + E(V_5)$$

$$= 10 + 10 + \dots + 10 = 50$$

donc la quantité moyenne obtient dans la bassine est 50 cl.

Exo 6 :

1) L'égalité $P(T\leq 60)=0,05$ se traduit par

$$\int_0^{60}\lambda e^{-\lambda x}\,dx=0,05\Rightarrow\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{60}=0,05\Rightarrow -e^{-60\lambda}+1=0,05$$

$$\Rightarrow e^{-60\lambda}=0,95\Rightarrow\lambda=\frac{\ln(0,95)}{-60}\Rightarrow\lambda\simeq 0,000732\ldots$$

2) On calcule :

$$P(T>40)=1-P(T\leq 40)=1-\int_0^{40}\lambda e^{-\lambda x}\,dx=1-\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{40}$$

$$=1-\left[-e^{-40\lambda}+1\right]=e^{-40\lambda}\simeq 0,9711\ldots$$

Exo 7 :

1) La probabilité que le temps de reparation excède 2 heures est égale à :

$$P(T>2)=1-P(T\leq 2)=1-\int_{-\infty}^{2}f_T(t)\,dt=1-\int_0^2\lambda e^{-\lambda t}\,dt$$

$$=1-\int_0^2\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\,dt=1-\left[-e^{-\frac{1}{2}t}\right]_0^2=1-\left[-e^{-1}+e^{0}\right]$$

$$P(T>2)=\frac{1}{e}\simeq 0,3678\ldots$$

2) On calcule la probabilité conditionnelle :

$$P_{(X>9)}(X>10)=\frac{P[(X>10)\cap(X>9)]}{P(X>9)}=\frac{P(X>10)}{P(X>9)}\quad\text{car }]10,\infty[\subset]9,\infty[$$

$$=\frac{1-P(X\leq 10)}{1-P(X\leq 9)}=\frac{1-\int_0^{10}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\,dt}{1-\int_0^{9}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\,dt}=\frac{1-\left[-e^{-\frac{1}{2}t}\right]_0^{10}}{1-\left[-e^{-\frac{1}{2}t}\right]_0^{9}}$$

$$P_{(X>9)}(X>10)=\frac{e^{-\frac{10}{2}}}{e^{-9/2}}=e^{-\frac{1}{2}}\simeq 0,6065\ldots$$

Exo 8 :

On appelle D la variable aléatoire donnant la durée de vie du disque dur. D suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Le fabriquant veut garantir que

$$P(D \leq 1) \leq 0{,}001$$

cad $P(D \leq 1) = \int_0^1 f_D(t)\,dt \leq 0{,}001$

$\Rightarrow \int_0^1 \lambda e^{-\lambda t}\,dt \leq 0{,}001 \Rightarrow \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^1 \leq 0{,}001$

$\Rightarrow -e^{-\lambda} + 1 \leq 0{,}001 \Rightarrow 0{,}999 \leq e^{-\lambda}$

$\Rightarrow \lambda \leq -\ln(0{,}999) \Rightarrow \frac{1}{\lambda} \geq \frac{-1}{\ln(0{,}999)} \simeq 999{,}5$

mais on sait que l'esperance $E(X)$ d'une loi X qui suit une loi exponentielle égale à $\frac{1}{\lambda}$ (d'après le cours)

donc on a $E(D) \geq 999{,}5$.

Alors la durée de vie moyenne du disque dur doit être au moins 999,5 ans !!!

Exo 9

1) * $P(X \leq 0{,}23) = \int_{-\infty}^{0{,}23} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0{,}23} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \phi(0{,}23)$

$\Rightarrow P(X \leq 0{,}23) \simeq 0{,}59095$.

* $P(X \geq 0{,}82) = 1 - P(X \leq 0{,}82) = 1 - P(X \leq 0{,}82) = 1 - \phi(0{,}82)$

$P(X \geq 0{,}82) \simeq 1 - 0{,}79389 \simeq 0{,}20611$.

* $P(X^2 \geq 0{,}82^2) = P[(X \leq -0{,}82) \cup (X \geq 0{,}82)] = P(X \leq -0{,}82) + P(X \geq 0{,}82)$

$= P(X \leq -0{,}82) + (1 - P(X \leq 0{,}82))$

$= \phi(-0{,}82) + 1 - \phi(0{,}82)$

$= [1 - \phi(0{,}82)] + 1 - \phi(0{,}82)$

$= 2 - 2\phi(0{,}82) \simeq 2 - 2 \times 0{,}79389 \simeq 0{,}41222$

2) On a $X \sim N(-1, 4)$, donc d'après le cours $\frac{X-(-1)}{4} = \frac{X+1}{4} = Y$ tq $Y \sim N(0,1)$. Alors

* $P(X \leq 0{,}23) = P\left(\frac{X+1}{4} \leq \frac{1+0{,}23}{4}\right) = P(Y \leq 0{,}3075)$

$\simeq P(Y \leq 0{,}31) = \phi(0{,}31) = 0{,}62172$

* $P(X \geq 0{,}82) = P\left(\frac{X+1}{4} \geq \frac{0{,}82+1}{4}\right) = P(Y \geq 0{,}455) \simeq 1 - P(Y \leq 0{,}455)$

$= 1 - \phi(0{,}455) \simeq 1 - \phi(0{,}46) \simeq 0{,}32276$

* $P(-3 \leq X \leq 1) = P\left(\frac{-3+1}{4} \leq \frac{X+1}{4} \leq \frac{1+1}{4}\right) = P(-0{,}5 \leq Y \leq 0{,}5)$

$= P(Y \leq 0{,}5) - P(Y \leq -0{,}5) = \phi(0{,}5) - \phi(-0{,}5) = \phi(0{,}5) - [1 - \phi(0{,}5)]$

$= 2\phi(0{,}5) - 1 = 2 \times 0{,}69146 - 1 = 0{,}38292$

$* \ P(X^2 > 0{,}82^2) = P(X < -0{,}82) + P(X > 0{,}82)$

$= P\left(\frac{X+1}{4} < \frac{-0{,}82+1}{4}\right) + P\left(\frac{X+1}{4} > \frac{0{,}82+1}{4}\right)$

$= P(Y < 0{,}045) + P(Y > 0{,}455)$

$\simeq \phi(0{,}05) + 1 - P(Y \leq 0{,}455)$

$\simeq \phi(0{,}05) + 1 - \phi(0{,}46)$

$\simeq 0{,}51994 + 1 - 0{,}67724$

$\simeq 0{,}8427$

3) $* \ P(X \leq x) = \phi(x) = 0{,}95 \xRightarrow[\text{le tableau}]{\text{d'après}} x \simeq 1{,}65$

$* \ P(X \geq x) = 0{,}10 \Rightarrow 1 - P(X \leq x) = 0{,}10$

$\Rightarrow \underbrace{P(X \leq x)}_{\phi(x)} = 1 - 0{,}10 = 0{,}90 \Rightarrow x \simeq 1{,}39$

$* \ P(|X| = x) = 0{,}90 \Rightarrow P(-x \leq X \leq x) = 0{,}90$

$\Rightarrow P(X \leq x) - P(X \leq -x) = 0{,}90 \Rightarrow \phi(x) - \phi(-x) = 0{,}90$

$\Rightarrow \phi(x) - [1 - \phi(x)] = 0{,}90 \Rightarrow \phi(x) = 0{,}95 \Rightarrow x \simeq 1{,}65$

$* \ P(5 + 3X \geq x) = 0{,}1 \Rightarrow P\left(X \geq \frac{x-5}{3}\right) = 0{,}1$

$\Rightarrow 1 - P\left(X \leq \frac{x-5}{3}\right) = 0{,}1 \Rightarrow P\left(X \leq \frac{x-5}{3}\right) = 0{,}90$

$\Rightarrow \phi\left(\frac{x-5}{3}\right) = 0{,}90 \Rightarrow \frac{x-5}{3} \simeq 1{,}29 \Rightarrow x \simeq 8{,}87$