UNIVERSITÉ MOSTEFA BEN BOULAID-BATNA 2
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE

SEMESTRE 1 - 2020/2021
NIVEAU : 3ème ANNÉE SI
DURÉE : 1 H

Examen du module Probabilités

Exercice 01

1) Donner la définition des notions suivantes :

tribu, probabilité, espace probabilisé, système complet d'évènements.

2) Donner l'énoncé du théorème de la limite monotone.

Exercice 02

On place dans un sac 5 billets de 500 DA, 7 billets de 1000 DA et 10 billets de 2000 DA. On choisit au hasard une poignée de 8 billets, chaque billet ayant la même probabilité d'être attrapé.

1) Quelle est la probabilité de n'avoir choisi aucun billet de 500 DA ?

2) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu uniquement des billets de 2000 DA ?

3) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu au moins un billet de chaque valeur ?

Exercice 03

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = \frac{1}{2^{n+1}}$.

1) Montrer que l'on définit ainsi une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

2) Calculer la probabilité de l'événement : $B = \{n \in \mathbb{N}, n \geq 10\}$.

Exercice 04

A une université, 40 pour cent de garçons et 15 pour cent des filles mesurent plus de 1,70m. De plus, 60 pour cent des étudiants sont des filles. Sachant qu'un étudiant, choisi au hasard, mesure plus de 1,70m, quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

NB :

Chaque exercice sur 5 points.

BON COURAGE

Mr. A.IKASSOULENE

Corrigé type d'examen Proba, L3-SI-Informatique

EXO1 : (5 pts)

Voir le cours : 1) 0,75 (×4) = 3 pts ; 2) 2 pts

EXO2 : (5 pts)

Soit Ω l'univers de cette expérience, donc $card(\Omega) = C_{22}^{8}$.

Il y a 5 billets de 500 DA, 7 billets de 1000 DA et 10 billets de 2000 DA.

1) $\dfrac{C_{(7+10)}^{8}}{C_{(5+7+10)}} = \dfrac{C_{17}^{8}}{C_{22}^{8}} \simeq 0,076$ (1,25)

2) $\dfrac{C_{10}^{8}}{C_{(5+7+10)}^{8}} = \dfrac{C_{10}^{8}}{C_{22}^{8}} \simeq 0,000141$ (1,25)

3) Calculons la probabilité de l'événement (2,5)

$E =$ "avoir obtenu au moins un billet de chaque valeur"

On a $\overline{E} = B =$ "ne pas obtenir des billets de 3 valeurs"

a) Soit $B_2 =$ "obtenir des billets de 2 valeurs"

et $B_{5,7} =$ "obtenir des billets de 500 et 1000 DA" ; $card(B_{5,7}) = C_{12}^{8}$

$B_{5,10} =$ "obtenir des billets de 500 et 2000 DA" ; $card(B_{5,10}) = C_{15}^{8} - C_{10}^{8}$

$B_{7,10} =$ "obtenir des billets de 1000 et 2000 DA" ; $card(B_{7,10}) = C_{17}^{8} - C_{10}^{8}$

On remarque que $B_2 = B_{5,7} \cup B_{5,10} \cup B_{7,10}$

donc $card(B_2) = card(B_{5,7}) + card(B_{5,10}) + card(B_{7,10})$

$$card(B_2) = C_{12}^{8} + C_{15}^{8} + C_{17}^{8} - 2C_{10}^{8}$$

b) Soit $B_1 =$ "obtenir des billets d'une seule valeur" ; $card(B_2) = C_{10}^{8}$

c) On remarque que $B = B_1 \cup B_2$, donc $card(B) = card(B_1) + card(B_2)$

donc $card(B) = C_{12}^{8} + C_{15}^{8} + C_{17}^{8} - C_{10}^{8}$

D) On a $\bar{E} = B \Rightarrow E = \bar{B} \Rightarrow P(E) = 1 - P(B)$

$$P(E) = 1 - \frac{card(B)}{card(\Omega)} = 1 - \frac{C_{12}^8 + C_{11}^8 + C_{17}^8 - C_{10}^8}{C_{22}^8} \simeq 0,902.$$

Exo 3 : (5 pts)

On a $P(n) = \frac{1}{2^{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrons que P est une probabilité :

a) P est une application (0,5)

b) $0 \leq P(\Omega) \leq 1$ $\forall, \Omega \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$? (1)

soit $\Omega \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, alors $\Omega = \{n_1, n_2, \dots\}$

$$\Rightarrow P(\Omega) = \sum_{n_i \in \Omega} P(n_i) = \sum_{n_i \in \Omega} \frac{1}{2^{n_i+1}}$$

mais $0 \leq \sum_{n_i \in \Omega} \frac{1}{2^{n_i+1}} \leq \sum_{n_i \geq 0} \frac{1}{2^{n_i+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots =$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

donc $0 \leq P(\Omega) \leq 1$.

c) $P(\mathbb{N}) = 1$? (1)

$$P(\mathbb{N}) = \sum_{n \geq 0} P(n) = P(0) + P(1) + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^\infty}{1 - \frac{1}{2}}\right] = 1$$

d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$; $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ incompatibles. (1)

A et B incompatibles $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$. Soit $B = \{m_1, m_2, \dots\}$ et

$A = \{n_1, n_2, \dots\}$, tq $n_i \neq m_j$ $\forall i, j$

donc $A \cap B = \emptyset$ et $P(A \cup B) = P(\{n_1; m_1; n_2; m_2; n_3; m_3; \dots\})$

$$= \sum P(n_i) + \sum P(m_i) = P(A) + P(B)$$

(car $n_i \neq m_j$ $\forall i, j$)

De a); b); c) et d) on dit que P est une probabilité

2) $P(B) = ?$ (1,5)

$$P(B) = P(\{10; 11; 12, 13, \dots\}) = \frac{1}{2^{10+1}} + \frac{1}{2^{11+1}} + \frac{1}{2^{12+1}} + \dots$$

$$= \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{2^{13}} + \dots = \frac{1}{2^{11}}\left[\frac{1-(\frac{1}{2})^{\infty}}{1-\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2^{12}}$$

Exo 4 : (5 pts)

Soit M = " un étudiant mesure plus de 1,70 m "

F = " un étudiant est une fille " (1 pt)

G = " un étudiant est un garçon "

D'après l'énoncé de l'exercice on a : (0,25 x 4)

$P(F) = 0,6$; $P(G) = 0,4$; $P_F(M) = 0,15$; $P_G(M) = 0,4$

On cherche la probabilité qu'un étudiant choisi au hasard est une fille sachant qu'il mesure plus de 1,70 m c.à.d $P_M(F)$.

$$P_M(F) = \frac{P(F \cap M)}{P(M)} = \frac{P_F(M)\, P(F)}{P(M \cap F) + P(M \cap G)} = \frac{P_F(M) \cdot P(F)}{P_F(M) \cdot P(F) + P_G(M) \cdot P(G)}$$

$$P_M(F) = \frac{0,15 \times 0,6}{0,15 \times 0,6 + 0,4 \times 0,4} = 0,36. \quad \text{(3 pts)}$$

Mr. IKASSOULENE