Corrigé type de l'examen de topologie L2-SAD

EXO 1 (1pt×5) = 5 pts

Voir le cours (chaque définition sur 1pt)

EXO 2 (0,75×7) = 5,25 pts + 0,75 sur la propreté de la feuille

① $A = [x,y]$; $\mathring{A} =]x,y[$; $\bar{A} = A = [x,y]$; $Fr(A) = \{x,y\}$

② $A =]x,y[$; $\mathring{A} = A =]x,y[$; $\bar{A} = [x,y]$; $Fr(A) = \{x,y\}$

③ $A =]x,y]$; $\mathring{A} =]x,y[$; $\bar{A} = [x,y]$; $Fr(A) = \{x,y\}$

④ $A = \mathbb{R}$; $\mathring{A} = \mathbb{R}$; $\bar{A} = \mathbb{R}$, $Fr(A) = \emptyset$

⑤ $A =]x,x[= \emptyset$; $\mathring{A} = \emptyset$; $\bar{A} = \emptyset$; $Fr(A) = \emptyset$

⑥ $A =]x,y[\cup]z,w[$; $\mathring{A} = A =]x,y[\cup]z,w[$; $\bar{A} = [x,y] \cup [z,w]$; $Fr(A) = \{x,y,z,w\}$

⑧ $A =]x,y[\cup]y,z[$; $\mathring{A} = A =]x,y[\cup]y,z[$; $\bar{A} = [x,z]$; $Fr(A) = \{x,y,z\}$

EXO 3 (1 pts ×4) = 4 pts

On a : $f : (X, \tau_g) \longrightarrow (X, \tau_{dis})$; $x \longmapsto f(x) = x$

① f est bijective car : $\forall y \in X, \exists! x \ (x = y)$ tq $f(x) = y$

② f est continue $\Leftrightarrow$ l'image réciproque de chaque ouvert de τ_{dis} est un ouvert de τ_g

mais on remarque que $\{x, x \in X\}$ est un ouvert de τ_{dis} et son image réciproque par f est $\{x\}$ lui même qui n'est pas un ouvert de τ_g. Donc f n'est pas continue

③ On a : $f^{-1} : (X, \tau_{dis}) \longrightarrow (X, \tau_g)$; $y \longmapsto f^{-1}(y) = y$

f^{-1} est continue $\Leftrightarrow$ l'image réciproque de chaque ouvert de τ_g est un ouvert de τ_{dis}

mais les seuls ouverts de τ_g sont $\emptyset$ et X, et leurs images réciproque sont $\emptyset$ et X eux mêmes qui sont des ouverts de τ_{dis}. La définition est vérifiée donc f^{-1} est continue.

④ f est un homéomorphisme $\Leftrightarrow$ f bijective + f continue + f^{-1} continue

comme f n'est pas continue alors f n'est pas un homéomorphisme

EXO 4 (2,5 pts ×2) = 5 pts

① Voir le cours page 34 (proposition 4.5)

② Voir le cours page 41 (proposition 4.30)