Corrigé type de l'interrogation de Topologie L2 - SAD

EXO 1 $2+2=4$ pts

① On a $d(x,y)=|\cos x-\cos y|$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$. Est ce que d est une distance ?

Soit $d(x,y)=0 \Rightarrow |\cos x-\cos y|=0 \Rightarrow \cos x=\cos y \Rightarrow x=\pm y+2\pi k$

donc $d(x,y) \not\Rightarrow x=y$. Alors d n'est pas une distance.

② Montrons que $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_\infty)$ ~~ou~~ $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_1)$ est un espace vectoriel normé.

c à d Montrons que $\|\cdot\|_\infty$ (ou montrer que $\|\cdot\|_1$) est une norme.

$\boxed{2.1}$ $\|\cdot\|_1$ est une norme (voir Exo 4, Série 5) $\left[\forall, \|(x_1,x_2,\dots x_n)\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right]$

$\boxed{2.2}$ Montrons que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme.

On a : $\forall x=(x_1,x_2,\dots x_n)\in\mathbb{R}^n$; $\|x\|_\infty=\|(x_1,x_2,\dots x_n)\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$

a) $\|x\|_\infty=0 \Leftrightarrow \|(x_1,x_2,\dots x_n)\|_\infty=0 \Leftrightarrow \max_{1\le i\le n}|x_i|=0 \Leftrightarrow x_i=0\ \forall i=\overline{1,n} \Leftrightarrow x=0$

b) Soient $\lambda\in\mathbb{R}$ et $x\in\mathbb{R}^n$, alors $\|\lambda x\|_\infty=\|\lambda(x_1,x_2,\dots x_n)\|_\infty=\|(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots\lambda x_n)\|_\infty$

$$:=\max_{1\le i\le n}|\lambda x_i|=|\lambda|\max_{1\le i\le n}|x_i|=|\lambda|\cdot\|x\|_\infty$$

donc $\forall x\in\mathbb{R}^n, \forall\lambda\in\mathbb{R}$: $\|\lambda x\|_\infty=|\lambda|\cdot\|x\|_\infty$

c) Soient $x,y\in\mathbb{R}^n$, alors $\|x+y\|_\infty=\|(x_1,x_2,\dots x_n)+(y_1,y_2,\dots y_n)\|_\infty$

$$=\|(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i+y_i| \quad —(*)$$

mais on sait que $|x_i+y_i|\le|x_i|+|y_i|$

$$\max_{1\le i\le n}|x_i+y_i|\le\max_{1\le i\le n}\left[|x_i|+|y_i|\right]$$

$$\le\max_{1\le i\le n}|x_i|+\max_{1\le i\le n}|y_i| \quad —(**)$$

De $(*)$ et $(**)$ on trouve :

$$\|x+y\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i+y_i|\le\max_{1\le i\le n}|x_i|+\max_{1\le i\le n}|y_i|=\|x\|_\infty+\|y\|_\infty$$

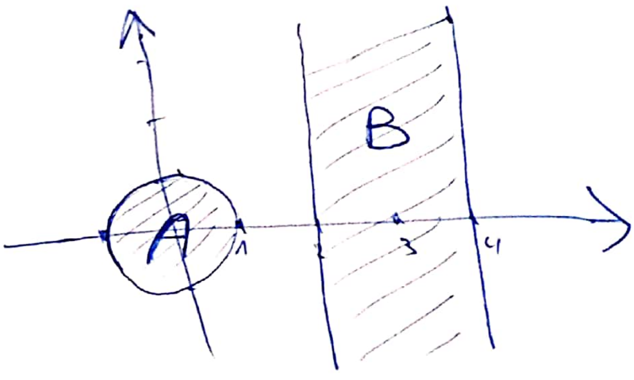
donc $\|x+y\|_\infty\le\|x\|_\infty+\|y\|_\infty$, $\forall x,y\in\mathbb{R}^n$

De a), b) et c) on déduit que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme, donc $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

EXO 2 $0{,}5\times 9=4{,}5$ pts

On a : $A=\{z\in\mathbb{C}\ /\ |z|\le 1\}$

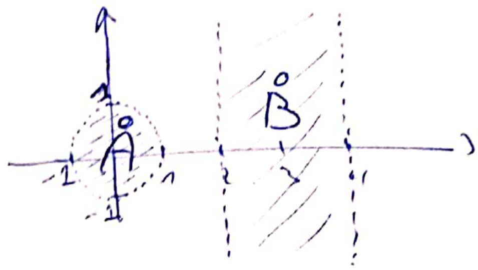
$B=\{z\in\mathbb{C}\ /\ |\mathrm{Re}(z-3)|\le 1\}$



① $S(A) = \sup\limits_{x,y \in A} d(x,y)$ = la plus grande distance entre les éléments de $A = 2$

② $S(B) = \sup\limits_{x,y \in B} d(x,y)$ = - - - - - - - - de $B = +\infty$

③ $d(A,B) = \inf\limits_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a,b)$ = la plus petite distance entre A et $B = 1$

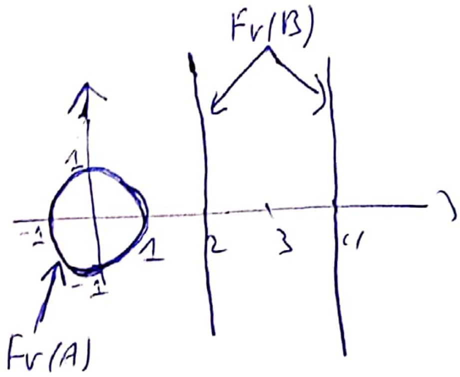


④ $\overset{\circ}{A} = \{ z \in \mathbb{C} / |z| < 1 \}$

⑤ $\overset{\circ}{B} = \{ z \in \mathbb{C} / |Re(z-3)| < 1 \}$

⑥ $\overline{A} = \{ z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1 \} = A$

⑦ $\overline{B} = \{ z \in \mathbb{C} / |Re(z-3)| \leq 1 \} = B$



⑧ $Fr(A) = \{ z \in \mathbb{C} / |z| = 1 \}$

⑨ $Fr(B) = \{ z \in \mathbb{C} / |Re(z-3)| = 1 \}$

<u>Indication</u> ;

On détermine l'ensemble B comme suit

$B = \{ z \in \mathbb{C} / |Re(z-3)| \leq 1 \} = \{ z \in \mathbb{C} / -1 \leq Re(z-3) \leq +1 \}$

$= \{ z \in \mathbb{C} / -1 \leq Re(z) - Re(3) \leq +1 \} = \{ z \in \mathbb{C} / -1 \leq Re(z) - 3 \leq +1 \}$

$= \{ z \in \mathbb{C} / -1+3 \leq Re(z) \leq +1+3 \} = \{ z \in \mathbb{C} / \underline{2 \leq Re\, z \leq 4} \}$

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2 \leq x \leq y \} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \underline{2 \leq x \leq 4 \text{ et } y \text{ quelconque}} \}$