Corrigé de l'interrogation 1 (6 pts)

EXO 1 (3 pts)

Soit $X =]0, +\infty[$.

Pour $x, y \in X$, on note $S(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$.

① Montrons que S est une distance : (2 pts)

1.1) Montrons que $\forall x \in X$, $S(x,x) = 0$

Soit $x \in X$, alors $S(x,x) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right| = |0| = 0$

1.2) Montrons que $\forall x, y \in X$; $S(x,y) = S(y,x)$.

Soient $x, y \in X$, alors $S(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| = S(y,x)$

1.3) Montrons que $\forall x, y, z \in X$; $S(x,y) \leq S(x,z) + S(z,y)$.

Soient $x, y, z \in X$, alors

$$S(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{y}\right)\right| \leq \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right| + \left|\frac{1}{z} - \frac{1}{y}\right|$$

$$= S(x,z) + S(z,y)$$

donc $S(x,y) \leq S(x,z) + S(z,y)$.

1.4) Montrons que $\forall x, y \in X$; $S(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$.

Soient $x, y \in X$, alors

$S(x,y) = 0 \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow x = y$.

On conclure que S est une distance sur X.

② Déterminons $B(1,1)$ (1+1 pts)

On a $B(1,1) = \{x \in X / S(1,x) < 1\} = \left\{x \in X / \left|\frac{1}{1} - \frac{1}{x}\right| < 1\right\}$

$= \left\{x \in X / \left|1 - \left(\frac{1}{x}\right)\right| < 1\right\} = \left\{x \in X / -1 < 1 - \frac{1}{x} < +1\right\}$

$= \left\{x \in X / -2 < -\frac{1}{x} < 0\right\} = \left\{x \in X / 0 < \frac{1}{x} < 2\right\}$

$= \left\{x \in X / \frac{1}{2} < x < \frac{1}{0}\right\} = \boxed{\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[}$

Exo2 (3 pts)

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa topologie usuelle.

Déterminons si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

(1pt)

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq |x| < 1\} = \{(x,y) / -1 < x < +1$ et y quelconque$\}$

$=]-1,+1[\times]-\infty,+\infty[$ (produit de deux ouverts de $\mathbb{R}$)

donc A est est un ouvert de $\mathbb{R}^2$

(1pt)

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 1$ et $0 < y < 1\} =]0,1[\times]0,1[$

est un produit de deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, donc B est un ouvert de $\mathbb{R}^2$

(1pt)

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 1$ et $0 \leq y \leq 1\} =]0,1[\times [0,1]$

est un produit d'un ouvert et d'un fermé de $\mathbb{R}$, donc C n'est un ouvert ni un fermé de $\mathbb{R}^2$.

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}^2$

$\mathbb{Q}$ n'est un ouvert ni un fermé de $\mathbb{R}^2$, donc $\mathbb{Q}^2$ n'est ouvert ni fermé de $\mathbb{R}^2$.