Corrigé de la série N°1 (Espace probabilisé)

Exo 1 :

1) $E_1 = A$, 2) $E_2 = A \cap B \cap \bar{C}$, 3) $E_3 = A \cap B \cap C$

4) $E_4 = A \cup B \cup C$, 5) $E_5 = [(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap C \cap \bar{B}) \cup (B \cap C \cap \bar{A})] \cup [A \cap B \cap C]$; 6) $E_6 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$, 7) $E_7 = [\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}] \cup [(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{A} \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{A} \cap \bar{B})]$, 8) $E_8 = [A \cap B \cap \bar{C}] \cup (A \cap C \cap \bar{B}) \cup (B \cap C \cap \bar{A})$.

Exo 2

1) $T = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{b, c, d, e\}\}$ est-elle une tribu ?

On a :

i) $\Omega \in T$ vérifié

ii) $\forall A \in T, \bar{A} \in T$ vérifié

iii) $\forall A_i \in T, \bigcup_i A_i \in T$ vérifié

alors T est une tribu.

2) $T' = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$ est-elle une tribu ?

On a :

i) $\Omega \in T'$ est vérifié

ii) $\forall A \in T', \bar{A} \in T'$ n'est pas vérifié car :

$\{a\} \in T'$ mais $\overline{\{a\}} = \{b, c, d, e\} \notin T'$

donc T' n'est pas une tribu.

* On complète T' à une tribu T''

$T'' = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{c, d, e\}\}$, on peut vérifier que T'' assure les trois conditions i), ii) et iii); donc c'est une tribu.

EXO3

1) fausse, 2) fausse, 3) fausse ; 4) fausse

5) vraie, on démontre comme suit :

On a $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux système complets d'évènements

i) vérifions que $(A_n\cap B_p)\cap(A_{n'}\cap B_{p'})=\emptyset$ $\forall(n,p)\neq(n',p')$.

On a :

$$(A_n\cap B_p)\cap(A_{n'}\cap B_{p'})=(A_n\cap A_{n'})\cap(B_p\cap B_{p'}) \quad — (*)$$

On a $(n,p)\neq(n',p') \Rightarrow \begin{cases} n\neq n' \\ \vee \\ p\neq p' \end{cases}$

Si $n\neq n'$, alors d'après le fait que $(A_n)_n$ est un système complet : $A_n\cap A_{n'}=\emptyset$. D'où $(*)$ donne $\emptyset$

Si $p\neq p'$, alors d'après le fait que $(B_n)_n$ est un système complet : $B_p\cap B_{p'}=\emptyset$. D'où $(*)$ donne $\emptyset$.

Donc la condition i) est vérifiée.

ii) vérifions que $\bigcup_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}(A_n\cap B_p)=\Omega$.

On a :

$$\begin{aligned}\bigcup_{(n,p)}(A_n\cap B_p) &= [(A_1\cap B_1)\cup(A_1\cap B_2)\cup(A_1\cap B_3)\cup\cdots]\\ &\cup[(A_2\cap B_1)\cup(A_2\cap B_2)\cup(A_2\cap B_3)\cup\cdots]\\ &\cup[(A_3\cap B_1)\cup(A_3\cap B_2)\cup(A_3\cap B_3)\cup\cdots]\\ &\vdots\\ &=[A_1\cap(B_1\cup B_2\cup B_3\cup\cdots]\\ &\cup[A_2\cap(B_1\cup B_2\cup B_3\cup\cdots]\\ &\cup[A_3\cap(B_1\cup B_2\cup B_3\cup\cdots]\\ &\vdots\\ &=\end{aligned}$$

$$= [A_1 \cap \Omega]$$
$$\cup [A_2 \cap \Omega]$$
$$\cup [A_3 \cap \Omega]$$
$$\vdots$$
$$= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$$
$$= \Omega .$$

Donc la condition ii) est vérifiée

De i) et ii), le système $(A_m \cap B_p)_{(m,p)}$ est complet.

Exo 4

1) $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$; $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$, Ω fini

Montrons que P est une probabilité :

i) Montrons que $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$

*) On a $card(A) \geq 0$ et $card(\Omega) > 0$

donc $\dfrac{card(A)}{card(\Omega)} \geq 0 \Rightarrow P(A) \geq 0$

**) on a $A \subset \Omega \Rightarrow card(A) \leq card(\Omega)$

$$\Rightarrow \frac{card(A)}{card(\Omega)} \leq 1 \Rightarrow P(A) \leq 1$$

De *) et **) on trouve $0 \leq P(A) \leq 1$

ii) Montrons que $P(\Omega) = 1$

On a $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} \Rightarrow card(\Omega) = \dfrac{card(\Omega)}{card(\Omega)} = 1$

iii) Montrons que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) ; \forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$
$A \cap B = \emptyset$

On a

$$\underline{P}(A\cup B) = \frac{card(A\cup B)}{card(\Omega)} = \frac{card(A)+card(B)}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{card(A)}{card(\Omega)} + \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \underline{P}(A) + \underline{P}(B)$$

i), ii) et iii) implique que $\underline{P}$ est une probabilité.

2) On a

$$P(A) = \sum_{n\in A} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n\in A} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

i) Montrons que $\underline{P}(\mathbb{N}^*) = 1$ (ici $\Omega = \mathbb{N}^*$)

$$\underline{P}(\mathbb{N}^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) + \cdots$$

$$= 1$$

ii) Montrons que $\underline{P}(A\cup B) = \underline{P}(A) + \underline{P}(B)$; $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$
$A \cap B = \emptyset$

On a : $$\underline{P}(A\cup B) = \sum_{n\in A\cup B} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \sum_{n\in A}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \sum_{n\in B}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \underline{P}(A) + \underline{P}(B)$$

iii) Montrons que $0 \leq P(A) \leq 1$; $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$

*) On a $n \in \mathbb{N}^*$, donc $\sum_n \frac{1}{n(n+1)} > 0 \Rightarrow P(A) \geq 0$

**) On $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$; $A \subset \mathbb{N}^* \Rightarrow \sum_{n\in A} \frac{1}{n(n+1)} \leq \sum_{n\in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

$$\Rightarrow \underline{P}(A) \leq 1$$

*) et **) donne $0 \leq P(A) \leq 1$, $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$

De i), ii) et iii); $\underline{P}$ est une probabilité.

EXO 5

On a : $P(A)=0,6$; $P(B)=0,3$; $P(A\cap B)=0,1$

1) La probabilité que A et B se réalisent.

$P(A\cap B)=0,1$

2) La probabilité que A ou B se réalisent.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,6+0,3-0,1=0,8$

3) La probabilité que ni A, ni B se réalisent.

$P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0,8=0,2$

EXO 6

1) $P(A)=\dfrac{C_4^3}{C_{20}^3}$; 2) $P(B)=\dfrac{C_4^2\,C_{16}^1}{C_{20}^3}$; 3) $P(C)=1-P(A)$

EXO 7

Soit B : "Obtenir de 1", et soit la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tq :

B_n : " Obtenir de 1 au cours de n premiers lancers "

On remarque : $B_n\subset B_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ et $B=\bigcup_{n=1}^{+\infty}B_n$

Donc on applique le théorème de limite monotone :

$$P(B)=P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}B_n\right)=P\left(\lim_{n\to+\infty}B_n\right)=\lim_{n\to+\infty}P(B_n)$$

mais $P(B_n)=1-P(\overline{B_n})=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$

(on a déjà que $P(\overline{B_n})=\left(5/6\right)^n$ dans le cours)

Ce qui fait $P(B)=\lim_{n\to+\infty}\left[1-\left(5/6\right)^n\right]=1$

Exo8

Soient les évènements :

F : « être une fille » ; G : « être un garçon »

On remarque que (G, F) est un système complet ($G \cup F = \Omega$)

et $P(F) = 0,7$ et $p(G) = 1 - P(F) = 1 - 0,7 = 0,3$

Soit un autre évènement

L : « Porter des lunettes ».

On a une fille sur cinq porte des lunettes, c'est la probabilité de porter des lunettes sachant que c'est une fille $P_F(L) = \frac{1}{5}$

2) un garçon sur trois porte des lunettes signifie que la probabilité de porter des lunettes sachant qu'est garçon

$P_G(L) = \frac{1}{3}$.

* On cherche la probabilité pour qu' "un porteur de lunettes soit une fille". c-à-d la probabilité de "d'être une fille sachant qu'est un porteur de lunettes" : $P_L(F) = ?$

On applique la formule de "Bayes"

$$P_B(A_{i_0}) = \frac{P_{A_{i_0}}(B) \cdot P(A_{i_0})}{\sum_{i \in I} P_{A_i}(B)\, P(A_i)},$$

dans notre cas : $$P_L(F) = \frac{P_F(L) \cdot P(F)}{P_F(L) \cdot P(F) + P_G(L) \cdot P(G)}$$

donc $$P_L(F) = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{7}{10}}{\frac{1}{5} \times \frac{7}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{10}} = 0,583$$

Exo 9

Soient les évènements :

M_1 : « prendre le médicament M_1 »

M_2 : « prendre le médicament M_2 »

On remarque que (M_1, M_2) est un système complet car $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1\right)$

et $P(M_1)=2/3$, $P(M_2)=1/3$.

Soit un autre évènement :

S : « être soulagé »

On a :

a) "avec le médicament M_1, 60% des patients sont soulagés"

signifie : $P_{M_1}(S)=0,6$

b) "avec le médicament M_2, 80% des patients sont soulagés"

signifie : $P_{M_2}(S)=0,8$.

1) On cherche $P(S)=?$

$P(S)=P(S\cap\Omega)=P(S\cap(M_1\cup M_2))=P((S\cap M_1)\cup P(S\cap M_2))$

$\Rightarrow P(S)=P(S\cap M_1)+P(S\cap M_2)$ car $M_1\cap M_2=\emptyset$

$\Rightarrow P(S)=P_{M_1}(S)\cdot P(M_1)+P_{M_2}(S)\cdot P(M_2)$

$\Rightarrow P(S)=0,6\times\frac{2}{3}+0,8\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}=0,666$

2) On cherche $P_S(M_1)=?$

On peut répondre comme l'exo 8, et on peut aussi répondre en utilisant la question 1) comme suit :

$$P_S(M_1)=\frac{P(S\cap M_1)}{P(S)}=\frac{P(M_1)\cdot P_{M_1}(S)}{P(S)}=\frac{2/3\times0,6}{2/3}=0,6.$$

Exo 10

Soient les evenements :

Y_V : « avoir les yeux verts »

C_N : « avoir les cheveux noirs »

(1) on cherche $P_{Y_V}(C_N) = ?$

$$P_{Y_V}(C_N) = \frac{P(C_N \cap Y_V)}{P(Y_V)} = \frac{0,15}{0,3} = 0,5$$

(2) On cherche $P_{C_N}(Y_V) = ?$

$$P_{C_N}(Y_V) = \frac{P(C_N \cap Y_V)}{P(C_N)} = \frac{0,15}{0,6} = 0,25$$

(3) On cherche $P_{C_N}(\overline{Y_V}) = ?$

$$P_{C_N}(\overline{Y_V}) = 1 - P_{C_N}(Y_V) = 1 - 0,25 = 0,75$$

Remarque :

*) 30% ont les yeux verts $\Leftrightarrow P(Y_V) = 0,3$

*) 60% ont les cheveux noir $\Leftrightarrow P(C_N) = 0,6$

*) 15% ont les yeux verts et les cheveux noirs $\Leftrightarrow P(C_N \cap Y_V) = 0,15$

Mr. IKASSOULENE. A/R