Corrigé de TD4 de topologie L2-SAD

Exo 4.1

X un ensemble non vide. Montrons que la topologie associée à la distance discrète d de X est la topologie discrète de X.

a) On a, par définition, O est un ouvert de la topologie associée à une distance d ssi O est une réunion des boules ouvertes de cette distance : $O = \bigcup_i B_i$

b) On cherche la nature des boules ouvertes dans l'espace métrique (X, d)

$B(a,r) = \{x \in X, d(a,x) < r\}$ t.q. $d(a,x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$
$a \in X$

Si $r < 1$: $B(a,r) = \{a\}$. Si $r = 0$: $B(a,r) = \phi$

Si $r \geq 1$: $B(a,r) = X$ (On a vu ça dans un exercice de séries précédentes)

puisque toute partie de X est une réunion de singletons $\{a_i\}$, $a_i \in X$,
alors toute partie de X est une réunion de boules $B_i(a_i, r)$, $r < 1$,
il résulte alors que toute partie de X est un ouvert de la topologie associée à d. Donc cette topologie contient toutes les parties de X comme des ouverts i.e. : $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ (la topologie discrète)

Exo 4.2

Montrons que toute boule fermée d'un espace métrique est un fermé.

Soit $B(a,r)$ une boule fermée de l'espace métrique (X, d) :

$B(a,r) = \{x \in X, d(a,x) \leq r\}$ $r \in \mathbb{R}^+$ et $a \in X$

Pour montrer que $B(a,r)$ est fermé il faut et il suffit de montrer qu'elle coïncide avec son adhérence $\overline{B(a,r)}$ i.e. : $B(a,r) = \overline{B(a,r)}$

Mais comme $B \subset \overline{B}$, il ne reste que de montrer que $\overline{B}(a,r) \subset B(a,r)$

Soit $x \in \overline{B}(a,r)$ et montrons par l'absurde que $x \in B(a,r)$:

Supposons que $x \notin B(a,r) \Rightarrow d(a,x) = \alpha > r$, alors

$B(a,r) \cap B(x, \gamma) = \phi$ tq $\gamma = \dfrac{\alpha - r}{2}$. ce dernier est vrai car :

Car si $B(a,r) \cap B(x,\gamma) \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in X$ tq $y \in B(a,r)$ et $y \in B(x,\gamma)$

$\Rightarrow d(a,y) < r$ et $d(x,y) < \gamma \Rightarrow d(a,x) < d(a,y) + d(x,y) = r+\gamma = r + \frac{\alpha - r}{2}$

$\Rightarrow d(a,x) < \frac{\alpha + r}{2} \Rightarrow \alpha < \frac{\alpha + r}{2} \Rightarrow \alpha < r$ contradiction

donc on a forcément $B(a,r) \cap B(x,\gamma) = \emptyset$

$\Rightarrow \exists V_x \in \mathcal{V}(x) : V_x \cap B(a,r) = \emptyset$

$\Rightarrow x$ n'est pas point adhérent à $B(a,r)$

$\Rightarrow x \notin \overline{B}(a,r)$ contradiction avec ~~la~~ l'hypothèse de départ

(Soit $x \in \overline{B}$). Donc notre supposition ($x \notin B(a,r)$) est fausse

c à d $x \in B(a,r)$. ce qui veut dire : $[\cancel{x} \in \overline{B}(a,r) \Rightarrow x \in B(a,r)]$

i.e $\overline{B}(a,r) \subset B(a,r)$.

par conséquence $\overline{B}(a,r) = B(a,r)$.

Exo 4.3

(X,d) et (Y,d') deux espaces métriques. $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, $x_0 \in X$, $\ell \in X$, $y_0 \in Y$ et $f : X \to Y$ une application.

1) Montrons : $(U_n)_n \to \ell$ dans $(X,d) \Leftrightarrow (U_n)_n \to \ell$ dans $(X, \mathcal{T}_d)$

Rappel :

$(U_n)_n$ converge vers "ℓ" dans l'espace métrique $(X,d) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : d(U_n, \ell) < \varepsilon$

$(U_n)_n$ converge vers "ℓ" dans l'espace topologique $(X, \mathcal{T}_d) \Leftrightarrow \forall V_\ell \in \mathcal{V}(\ell), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : U_n \in V_\ell$

$\Rightarrow$)

On a : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : d(U_n, \ell) < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : U_n \in B(\ell, \varepsilon)$

mais $V_\ell \in \mathcal{V}(\ell) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, B(\ell, \varepsilon) \subset V_\ell$

$\Rightarrow \forall V_\ell \in \mathcal{V}(\ell), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : U_n \in V_\ell$

$\Rightarrow (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers "ℓ" dans l'espace Topologique $(X, \mathcal{T}_d)$

$\Leftarrow)$

on a: $\forall V_\ell \in \mathcal{V}(\ell), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : u_n \in V_\ell$

mais puisque $B(\ell, \varepsilon)$ est un voisinage de ℓ on peut prendre $V_\ell = B(\ell, \varepsilon)$

donc la définition ci-dessus implique :

$\forall B(\ell, \varepsilon), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : u_n \in B(\ell, \varepsilon)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : u_n \in B(\ell, \varepsilon)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : d(u_n, \ell) < \varepsilon$

$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers "ℓ" dans l'espace métrique (X, d).

2) Montrons: $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ de (X, d) dans $(Y, d') \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ de $(X, \mathcal{T}_d)$ dans $(Y, \mathcal{T}_{d'})$

Rappel :

$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ au sens métrique $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), y_0) < \varepsilon$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ au sens topologique $\Leftrightarrow \forall U' \in \mathcal{V}(y_0), \exists U \in \mathcal{V}(x_0) : f(U) \subset U'$

$\Rightarrow)$

On a : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \quad d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), y_0) < \varepsilon$

$\forall B(y_0, \varepsilon), \exists B(x_0, \delta) : \quad f(B(x_0, \delta)) \subset B(y_0, \varepsilon)$ — $(*)$

mais comme $\forall U' \in \mathcal{V}(y_0), \exists \varepsilon > 0$ tq $B(y_0, \varepsilon) \subset U'$

et $\forall U \in \mathcal{V}(x_0), \exists \delta > 0$ tq $B(x_0, \delta) \supset U$

alors $(*)$ implique

$\forall U' \in \mathcal{V}(y_0), \exists U \in \mathcal{V}(x_0) : f(U) \subset U'$ [car $f(U) \subset f(B(x_0, \delta)) \subset B(y_0, \varepsilon) \subset U'$]

Ce qui fait que : $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ au sens topologique

$\Leftarrow)$

On a : $\forall U' \in \mathcal{V}(y_0), \exists U \in \mathcal{V}(x_0) : f(U) \subset U'$ — $(**)$

mais comme $\forall U' \in \mathcal{V}(y_0), \exists \varepsilon > 0$, tq $B(y_0, \varepsilon) \supset U'$

et $\forall U \in \mathcal{V}(x_0), \exists \delta > 0$ tq $B(x_0, \delta) \subset U$

alors $(**)$ implique

$\forall B(y_0,\varepsilon), \exists B(x_0,\delta) : f(B(x_0,\delta)) \subset B(y_0,\varepsilon)$ $\left[\text{car } f(B(x_0,\delta)) \subset f(O) \subset O' \subset B(y_0,\varepsilon)\right]$

donc $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, x \in B(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in B(y_0,\varepsilon)$

c-à-d: $\forall \varepsilon>0, \exists\delta>0, d(x_0,x)<\delta \Rightarrow d'(y_0,f(x))<\varepsilon$

ce qui veut dire que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ au sens métrique

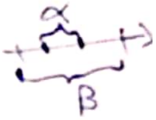
Exo 4.4

(X,d) un espace métrique et $A, B \subset X$ non vides

① Montrons que $A \subset B \Rightarrow d(x,A) \leq d(x,B)$

On a: $d(x,A) = \min\limits_{p\in A} d(x,p)$ ou $\inf\limits_{p\in A} d(x,p)$

$d(x,B) = \min\limits_{p\in B} d(x,p)$ ou $\inf\limits_{p\in B} d(x,p)$

Comme $A\subset B$, alors $\{d(x,p)/p\in A\}$ et $\{d(x,p)/p\in B\}$ pour x fixé de X, sont deux parties de $\mathbb{R}$ tq $\underbrace{\{d(x,p)/p\in A\}}_{\alpha} \subset \underbrace{\{d(x,p)/p\in B\}}_{\beta}$ 

donc $\inf \beta \leq \inf \alpha$ (en plus $\sup\beta \geq \sup\alpha$)

$\Rightarrow \inf\{d(x,p)/p\in B\} \leq \inf\{d(x,p)/p\in A\}$

$\Rightarrow \inf\limits_{p\in B} d(x,p) \leq \inf\limits_{p\in A} d(x,p)$

$\Rightarrow d(x,B) \leq d(x,A)$

On conclure alors que $A\subset B \Rightarrow d(x,B) \leq d(x,A), \forall x\in X$

② Montrons que $d(x,A) = d(x,\bar{A}), \forall x \in X$

On a: $A \subset \bar{A}$ alors $d(x,\bar{A}) \leq d(x,A)$

supposons que $d(x,\bar{A}) < d(x,A)$, donc $\exists \varepsilon>0: d(x,\bar{A}) + \varepsilon < d(x,A)$

$\Rightarrow d(x,\bar{A}) < d(x,A) - \varepsilon \Rightarrow \inf\limits_{a\in\bar{A}} d(x,a) < d(x,A) - \varepsilon$

$\Rightarrow \exists x_0 \in \bar{A} : d(x,x_0) < d(x,a) - \varepsilon$

$\Rightarrow \exists x_0 \in \bar{A} : d(x,x_0) + \varepsilon < d(x,A)$

$\Rightarrow \exists x_0 \in \bar{A} : d(x, x_0) + \alpha < \inf_{x' \in A} d(x, x')$

$\Rightarrow \exists x_0 \in \bar{A} ; d(x, x_0) + \alpha < d(x, x'), \forall x' \in A$

$\Rightarrow \exists x_0 \in \bar{A}, \forall x' \in A ; d(x, x_0) + \alpha < d(x, x')$

$\Rightarrow \exists x_0 \in \bar{A}, \forall x' \in A : \alpha < d(x, x') - d(x, x_0)$

mais on a $d(x, x') - d(x, x_0) \leq d(x', x_0)$ [car $d(x, x') \leq d(x, x_0) + d(x_0, x')$]

$\Rightarrow \exists x_0 \in A, \forall x' \in A : \alpha < d(x_0, x')$

$\Rightarrow \exists x_0 \in A$ et $[\exists \alpha > 0 : B(x_0, \alpha) \cap A = \emptyset]$

$\Rightarrow x_0 \in \bar{A}$ et $[x_0$ n'est pas point adhérent à $A]$

ce qu'est contradictoire ; alors le fait que $d(x, \bar{A}) < d(x, A)$ est faux, or que $d(x, \bar{A}) \leq d(x, A)$. On déduit donc que $d(x, \bar{A}) = d(x, A)$

EXO 5 :

Montrons que dans un espace métrique : A partie bornée $\Leftrightarrow A \subset$ boule ouverte

$\Rightarrow)$

Soit A une partie bornée $\Leftrightarrow$ le diamètre de A, $\delta(A) < +\infty$

$\Leftrightarrow \exists a > 0$ tq $\delta(A) = a$

$\Leftrightarrow \exists a > 0$ tq $\sup_{x, y \in A} d(x, y) = a$

$\Leftrightarrow \exists a > 0$ tq $\forall x, y \in A : d(x, y) < a$

donc pour x_0 quelconque fixé de A on a : $\forall y \in A : d(x_0, y) < a$

$\Rightarrow \forall y \in A : y \in B(x_0, a)$

$\Rightarrow A \subset B(x_0, a)$

c.à.d A est incluse dans une boule ouverte.

$\Leftarrow)$

Soit A une partie incluse dans une boule ouverte $B(x_0, a)$, alors

$\forall x, y \in A : d(x_0, x) < a$ et $d(x_0, y) < a$

$\Rightarrow d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) < a + a = 2a$

$\Rightarrow \forall x, y \in A : d(x, y) < 2a$

$\Rightarrow \sup_{x, y \in A} (A) < 2a \Rightarrow \delta(A) < 2a \Rightarrow A$ est bornée.

EXO 6

Montrons que toute réunion finie de parties bornées d'un espace métrique est bornée.

Soient $A_1, A_2, \dots A_n$ des parties bornées d'un espace métrique (X, d), alors

$\exists a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{R}$ tq $\delta(A_1) = a_1$, $\delta(A_2) = a_2, \dots$ $\delta(A_n) = a_n$

D'après EXO 5, on a : $A_1 \subset B_1(x_1, a_1)$ tq x_1 est un point quelconque de A_1 $(x_1 \in A_1)$

aussi : $A_2 \subset B_2(x_2, a_2)$, $x_2 \in A_2$

$\vdots$

$A_n \subset B_n(x_n, a_n)$; $x_n \in A_n$

donc $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A \subset B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i(x_i, a_i)$

Pour répondre au question, il suffit de prouver que B est bornée ;

Soit $a = \max_{x_i, x_j} d(x_i, x_j)$ tq $x_i, x_j \in \{a_1, a_2, \dots a_n\}$

$u = \max_{i=\overline{1,n}} (a_i)$

et soit $\alpha = a + 2u$ $[\alpha < +\infty$ car $a \in \mathbb{R}^+$ et $u \in \mathbb{R}^+]$

Maintenant on prend x, y quelconques de B, alors pour tous $x, y \in B$, $\exists i, j$ tq $x \in B(x_i, a_i)$ et $y \in B(x_j, a_j)$. Et on a :

$$\begin{cases} d(x, y) < d(x, x_i) + d(x_i, y) & \text{tq } x \in B(x_i, a_i) \\ \text{et } d(x_i, y) < d(x_i, x_j) + d(x_j, y) & \text{tq } y \in B(x_j, a_j) \end{cases}$$

donc $d(x, y) < d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y)$ — ⊛

mais :
$$\begin{cases} d(x, x_i) < a_i < u \\ \text{et } d(x_j, y) < a_j < u \\ \text{et } d(x_i, x_j) < a \end{cases}$$

ce qui fait que ⊛ : $d(x, y) < u + a + u = \alpha$

Donc $\forall x, y \in B$: $d(x, y) < \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ $(\alpha < +\infty)$

$\Rightarrow$ B est borné

On déduit alors que la réunion de A_i est bornée.

Exo7

A et B deux parties d'un espace métrique (X, d)

① Montrons que $A \subset B \Rightarrow \delta(A) \leq \delta(B)$

On a : $\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$ et $\sup_{x,y \in B} d(x,y) = \delta(B)$

et $A \subset B \Rightarrow \underbrace{\{d(x,y),\ x,y \in A\}}_{\subset \mathbb{R}^+} \subset \underbrace{\{d(x,y);\ x,y \in B\}}_{\subset \mathbb{R}^+}$

$\Rightarrow \sup\{d(x,y);\ x,y \in A\} \leq \sup\{d(x,y);\ x,y \in B\}$

$\Rightarrow \sup_{x,y \in A} d(x,y) \leq \sup_{x,y \in B} d(x,y)$

$\Rightarrow \delta(A) \leq \delta(B)$

② Montrons que $\delta(\bar{A}) = \delta(A)$.

On a : $A \subset \bar{A}$ alors selon ① $\delta(A) \leq \delta(\bar{A})$

Supposons que $\delta(A) < \delta(\bar{A})$ [Strictement]

et on montre que ça mène à une contradiction (par la façon qu'on a vu au 2ème question de l'exo4), ce que veut dire que $\delta(A) = \delta(\bar{A})$.

Exo4.9

Montrons que les distances d_1, d_2 et d_∞ sont équivalentes dans $\mathbb{R}^n$

Rappel : $d_1(x,y) = d_1((x_1, x_2, \dots x_n);(y_1, y_2, \dots y_n)) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

$d_2(x,y) = d_2((x_1, x_2, \dots x_n);(y_1, y_2, \dots y_n)) = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}$

$d_\infty(x,y) = d_\infty((x_1, x_2, \dots x_n);(y_1, y_2, \dots y_n)) = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i|$

* Deux distances sont équivalentes ssi $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tq $\alpha d \leq d' \leq \beta d$

① Montrons que $d_2 \leq d_1$

On a $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \leq \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|\right]^2$

$\Rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \Rightarrow d_2 \leq d_1$

② on a : $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq \left[\max_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i|\right] * n$

$\Rightarrow \quad d_1 \leq n\, d_\infty$

③ on a : $\left[\max_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i|\right]^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2$

$\Rightarrow \quad \max_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i| \leq \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \quad d_\infty \leq d_2 \Rightarrow n\, d_\infty \leq n\, d_2$

④ De ①, ② et ③ on a : $\boxed{d_2 \leq d_1 \leq n\, d_\infty \leq n\, d_2}$, Donc les trois distances sont équivalentes.

On peut détailler ça comme suit (n'est pas nécessaire) :

a) on a $d_2 \leq d_1$ de ④
mais aussi de ④ on a : $d_1 \leq n d_\infty \leq n d_2 \Rightarrow d_1 \leq n d_2$ $\Bigg\} \Rightarrow d_2 \leq d_1 \leq n d_2$

ce que veut dire que d_1 et d_2 sont équivalentes.

b) on a de ④ : $d_2 \leq d_1 \leq n d_\infty \Rightarrow d_2 \leq n d_\infty$
et de ④ aussi : $n d_\infty \leq n d_2$ $\Bigg\} \Rightarrow d_2 \leq n d_\infty \leq n\, d_2$

$\Rightarrow \frac{1}{n} d_2 \leq d_\infty \leq d_2$

ce qu'implique que d_2 et d_∞ sont équivalentes

c) De ④ on a : $d_1 \leq n d_\infty$
et de ④ aussi : $\left.\begin{matrix} n d_\infty \leq n d_2 \\ d_2 \leq d_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} n d_\infty \leq n d_2 \\ n d_2 \leq n d_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow n d_\infty \leq n d_1$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad d_1 \leq n d_\infty \leq n\, d_1 \Rightarrow \frac{1}{n} d_1 \leq d_\infty \leq d_1$

donc d_1 et d_∞ sont équivalentes.

EXO 4.10

$X =:]0;+\infty[.\ \forall x, y \in X : d(x,y) = |x - y|$

$\forall x, y \in X : d'(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$

a) on montre que d et d' ne sont pas équivalentes :

$\Leftarrow$: supposons que $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+$ tq $d' \leq \alpha d$ c.à.d :

$\exists \alpha > 0, \forall x, y \in X : d'(x,y) \leq \alpha d(x,y) \Leftrightarrow \exists \alpha > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^{+*} \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \leq \alpha |x-y|$

$\Leftrightarrow \exists \alpha > 0; \forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}; \frac{|x-y|}{xy} \leq \alpha |x-y|$

$\Leftrightarrow \exists \alpha > 0; \forall x, y \in \mathbb{R}^{+*} : \frac{1}{xy} \leq \alpha$, et ça est faux, car il suffit de prendre $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$ tq $xy < \frac{1}{\alpha}$ pour trouver que cette dernière condition est fausse.

C.à.d : il n'existe pas $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tq $d' \leq \alpha d \Rightarrow d'$ et d ne sont pas equivalente.

b) d et d' ne sont pas equivalentes (comme on a vu), mais sont equivalentes topologiquement i.e : ils ont les mêmes ouverts (dans ce cas $X = \mathbb{R}^{+*}$, ils ont les mêmes intervalles de $\mathbb{R}^{+*}$ comme ouverts de $\mathcal{T}_d$ et $\mathcal{T}_{d'}$).

Pour prouver ça, il y a un peu trop de calculs.

Mr. I KASSOULENE