Série 05 et corrigé

EXO 1

L'espace $(\mathbb{R}, d)$ est-il complet si d l'une des métrique suivantes?

① $d(x,y) = |x^3 - y^3|$. ② $d(x,y) = |e^x - e^y|$

Solution

① pour montrer qu'un espace (E, d) est complet, il faut et il suffit de montrer que toute suite de Cauchy dans cet espace est convergente

Soit $(U_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}, d)$, donc

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N : d(U_p, U_q) = |U_p^3 - U_q^3| < \varepsilon$.

Donc la suite $(U_n^3)_n$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

mais on sait que l'espace $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet, alors la suite $(U_n^3)_n$ converge vers sa limite ℓ : $|U_n^3 - \ell| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ $\left(\lim\limits_{n \to +\infty} U_n^3 = \ell\right)$

Soit $U \in \mathbb{R}$ tq $U^3 = \ell$ [c'est possible car : $\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists U \in \mathbb{R}$ tq $U^3 = \ell$]

Alors $d(U_n, U) = |U_n^3 - U^3| = |U_n^3 - \ell|$ qui tend vers zero, donc $(U_n)_n$ converge vers U dans $(\mathbb{R}, d)$, ce que veut dire que $(\mathbb{R}, d)$ est complet.

② pour montrer qu'un espace (E, d) n'est pas complet, il suffit de donner une suite de cet espace qui est de Cauchy mais ne converge pas dans cet espace.

Soit la suite $(U_n)_n$ définit par $U_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$.

a) On montre que cette suite est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, d)$:

pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, soit $N \in \mathbb{N}$ tq $e^{-N} < \frac{\varepsilon}{2}$ (c.à.d $N > -\ln(\varepsilon/2)$)

alors pour tout $p, q \geq N$ on a : $d(U_p, U_q) = |e^{U_p} - e^{U_q}| = |e^{-p} - e^{-q}| \leq e^{-p} + e^{-q}$

$\leq e^{-N} + e^{-N} = 2e^{-N} \leq 2 \cdot \varepsilon/2 = \varepsilon$

En résumant, on a :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N : d(U_p, U_q) < \varepsilon$,

donc la suite $(U_n)_n$ tq $U_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$ est une suite de Cauchy dans l'espace $(\mathbb{R}, d)$.

b) Montrons que cette suite ne converge pas dans $(\mathbb{R}, d)$:

Supposons que $(U_n)_n$ converge dans $(\mathbb{R}, d)$ et $U \in \mathbb{R}$ est sa limite ($\lim_{n \to +\infty} U_n = U$ ou $d(U_n, U) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$), alors $d(U_n, U) = |e^{-U_n} - e^{U}| = |e^{-n} - e^{U}|$ tend vers zéro

donc e^{-n} tend vers e^{U} d'une part, et d'autre part tend vers 0, càd $e^{U} = 0$, mais il n'existe pas $U \in \mathbb{R}$ tq $e^{U} = 0$. Donc notre supposition est fausse (contradiction), ce que veut dire que $(U_n)_n$ ne converge pas dans $(\mathbb{R}, d)$

On conclure alors que $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet.

EXO 2

Soient E un espace topologique séparé et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E qui converge vers un élément ℓ de E

* Montrer que l'ensemble $K := \{U_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est une partie compacte de E

Solution

Rappel : A est une partie compacte de E ssi de toute famille $(O_i)_{i \in I}$ d'ouverts de E dont la réunion contient A, on peut extraire un nombre fini d'ouverts ~~dont~~ la réunion contient A.

Maintenant, soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de E dont la réunion contient $K = \{U_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$

Soit O_ℓ l'ouvert qui contient $\{\ell\}$, donc par définition de la limite d'une suite, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$: $U_n \in O_\ell$

Soit O_i l'ouvert qui contient U_i, $i = 0, 1, \ldots, N$

On peut récrire K comme suit : $K = \underbrace{\{U_0, U_1, \ldots U_N\}}_{K_1} \cup \underbrace{\{U_{N+1}, U_{N+2}, \ldots\} \cup \{\ell\}}_{K_2}$

On remarque que K_1 est contenu dans $\bigcup_{i=1}^{N} O_i$ et K_2 est contenu dans O_ℓ

donc la réunion fini $\left(\bigcup_{i=1}^{N} O_i\right) \cup O_\ell$ contient K, alor A est une partie compacte de E.

EXO 3

Est-ce que les espaces topologiques suivants sont connexes ?

(1) IR muni de sa topologie usuelle.

(2) E muni de la topologie grossière (E ensemble quelconque)

(3) E muni de la topologie affine (= = =)

Solution

Rappel : un espace topologique (E, τ) est dit connexe, s'il n'est pas possible de l'écrire sous forme de réunion de deux ouverts différents de ϕ et de E.

(1) IR muni de sa topologie usuelle (les ouverts sont les intervalles ouverts) est connexe, car on peut pas écrire IR sous forme de réunion de deux intervalles ouverts (différent de $]-\infty, +\infty[$ qui est IR)

(2) Les ouverts de la topologie grossière sont uniquement ϕ et E donc on peut pas écrire E sous forme de réunion de deux ouverts autres que ϕ et E i.e il n'existe pas O_1 et O_2 différents de ϕ et E tq $E = O_1 \cup O_2$. Donc E muni de sa topologie grossière est connexe

(3) Si E est muni de sa topologie affine, alors chaque partie de E est un ouvert.
On peut écrire E sous forme $E = A \cup (E - A)$ $\forall A \subset E$
mais A et $(E-A)$ sont des parties de E, donc deux ouverts de la topologie affine de E. càd on a écrit E sous forme de réunion de deux ouverts différents de ϕ et de E. Donc E muni de sa topologie affine n'est pas connexe.

Exo 4

Montrer que les applications suivantes sont des normes.

① $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$(x_1, \dots x_n) \longmapsto \|(x_1, x_2, \dots x_n)\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

② $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$(x_1, \dots x_n) \longmapsto \|(x_1, x_2, \dots x_n)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Solution

Rappel : Une application $\|\cdot\|$ définie sur K-espace vectoriel E dans $\mathbb{R}^+$, est une norme s'il vérifie les propriétés suivantes :

① $\forall x \in E : \|x\| = 0_K \Leftrightarrow x = 0_E$

② $\forall x \in E, \forall \lambda \in K : \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

③ $\forall x, y \in E : \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

I) Montrons que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ [$\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel]

① Soit $x = (x_1, x_2, x_3, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$;

$$\|x\|_1 = \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow |x_i| = 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$$

$$\Leftrightarrow x_i = 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2, \dots x_n) = (0, 0, \dots 0)$$

$$\Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^n}$$

② Soit $x = (x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\|\lambda x\|_1 = \|\lambda(x_1, x_2, \dots x_n)\|_1 = \|(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots \lambda x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |\lambda| |x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda| \cdot \|x\|_1$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda x\|_1 = |\lambda| \cdot \|x\|_1$

③ Soit $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots y_n)$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$

$$\|x+y\|_1 = \|(x_1, x_2, \dots x_n) + (y_1, y_2, \dots y_n)\|_1 = \|(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots)\|_1$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|$$

mais on sait que $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$

donc $\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} [|x_i| + |y_i|]$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|$$

$$\Rightarrow \|x+y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$$

De ①, ② et ③ on conclure que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

II) par une manière similaire on répond à la deuxième question.

Bon courage

Mr. IKASSOULENE