Série d'exercices N°3, Probabilité-Statistiques, L3 Informatique

Faculté MI, Département Informatique, Université Batna 2

Variables aléatoires discrètes et continues

Exercice 01

Soit X une varéable aléatoire dont la loi est donnée par

x	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}_X(x)$	0.1	0.3	0.4	0.1	0.05	0.05

1. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. Soit Y une variable aléatoire telle que $Y = 3x - 5$. Déduire $E(X)$ et $V(Y)$.

Exercice 02

Dans chacun des cas, dites si la fonction f définit une densité. Si oui calculer $E(X)$ et $V(X)$.

$$1)\ f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^4} & \text{si } x \in [1, +\infty[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad ; \quad 2)\ f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x \in [0, +\infty[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 03

1) Soit I l'intervalle $[1, 10]$ et f_λ la fonction définit sur I par $f_\lambda(t) = \lambda t^{-2}$. Déterminer le réel λ pour lequel f_λ est une densité de probabilité.

2) Même question avec $I = [1, +\infty]$.

3) Dans les deux cas, donner les valeurs de $E(X)$ et $V(Y)$.

Exercice 04

Dans un parc national, le guide propose quotidiennement aux visiteurs l'observation des gazelles venant s'abreuver dans un lac au coucher de soleil. Le temps d'attente T du groupe de visiteurs, en heures, avant l'arrivée des gazelles, suit une loi uniforme sur $[0, 1]$. Calculer les probabilités suivantes :

1) $P(T > 0.5)$ 2) $P(0.2 < T < 0.6)$ 3) $P(T = 0.6)$.

Exercice 05

On remplit un verre de volume 20 cl d'une quantité aléatoire d'eau choisie uniformément entre 0 et 20 cl :

1) Quelle est la probabilité d'obtenir moins de 5 cl d'eau ?

2) On vide 5 verres ainsi remplis dans une très grande bassine. Quelle quantité moyenne d'eau obtient-

on dans la bassine ?

Exercice 06

Une variable aléatoire T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1) Trouver le paramètre de cette loi sachant que $P(T \leq 60) = 0.05$

2) Déduisez-en $P(T > 40)$.

Exercice 07

Le temps, mesuré en heures, nécessaire pour réparer une certaine machine suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/2$.

1) Quelle est la probabilité que le temps de réparation excède 2 heures ?

2) Quelle est la probabilité qu'une réparation prenne au moins 10 heures, étant donné que sa durée a déjà dépassé 9 heures ?

Exercice 08

On suppose que la durée de vie d'un disque dur est distribuée selon une loi exponentielle. Le fabricant veut garantir que le disque dur a une probabilité inférieure à 0,001 de tomber en panne sur un an. Quelle durée de vie moyenne minimale doit avoir le disque dur ?

Exercice 09

1) On suppose que X est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

À l'aide de la table de valeurs de Φ, déterminer une valeur approchée des probabilités suivantes :

$$P(X \leq 0,23), P(X \geq 0,82), P(-3 \leq X \leq 1), P(X^2 > 0,82^2).$$

2) Reprendre la question précédente en supposant cette fois que X suit $\mathcal{N}(-1, 4)$).

3) On suppose que X suit, $\mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer $x \in \mathbb{R}$ pour que :

$$P(X \leq x) = 0.95, \quad P(X \geq x) = 0.10, \quad P(|X| \leq x) = 0.90, \quad P(5 + 3X > x) = 0.01.$$

4) On suppose maintenant que X suit une loi normale.

Déterminer l'espérance et la variance de X sachant $P(X < -1) = 0,05$ et $P(X > 3) = 0,12$.

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx, \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \quad 0 \leq x < 1.99$$

X\0.0	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670

X variable gaussienne suit $\mathcal{N}(0,1)$.

Cette table permet de determiner $P(X \leq x)$ pour x entre 0 et 2.