Serie d'exercices N°4 (TD 4)

Exo 1:

Montrer que les applications suivantes définies sur $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$ sont des normes : $\|(x_1, \dots x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$; $\|(x_1, x_2 \dots x_n)\|_\infty = \underset{i=\overline{1,n}}{\mathrm{Max}} |x_i|$.

On a : $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$x \longmapsto \|x\|_1 = \|(x_1, \dots x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

i) Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^n}$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors $\|x\|_1 = 0 \iff \|(x_1, \dots x_n)\|_1 = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0$

$\iff |x_i| = 0 \ \forall i = \overline{1,n} \iff x_i = 0 \ \forall i = \overline{1,n}$

$\iff (x_1, \dots x_n) = (0, \dots 0) \iff x = 0_{\mathbb{R}^n}$

ii) Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda x\|_1 = |\lambda| \cdot \|x\|_1$

Soient $x = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$\|\lambda x\|_1 = \|\lambda (x_1, x_2, \dots x_n)\|_1 = \|(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots \lambda x_n)\|_1$

$= \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda| \cdot |x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$= |\lambda| \cdot \|x\|_1$

iii) Montrons que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$

soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, alors

$\|x + y\|_1 = \|(x_1, x_2, \dots x_n) + (y_1 + y_2 \dots y_n)\|_1 = \|(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)\|_1$

$= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|$.

On sait que $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$.

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \left[|x_i| + |y_i| \right]$

$= \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|$

C.à.d $\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|$

$\Rightarrow \|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$

D'où $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$

De même façon on montre que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme aussi.

Exo 2

On definit sur $\mathbb{R}^2$ une application α par

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto \alpha(x) = \|x\|_\infty + 2\|x\|_1$$

($\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont les normes définies dans exo 1)

*) Montrons que $(\mathbb{R}^2, \alpha)$ est un espace normé.

On sait que $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel, il nous reste que de montrer que α est une norme :

i) Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}^2, \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^2}$

Soit $x \in \mathbb{R}^2$, alors $\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \|x\|_\infty + 2\|x\|_1 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \|x\|_\infty = 0 \\ \wedge \\ \|x\|_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (\text{car } \|\cdot\|_\infty \text{ est une norme}) \\ \wedge \\ x = 0 & (\text{car } \|\cdot\|_1 \text{ est une norme}) \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

ii) Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R} ; \alpha(\lambda x) = |\lambda| \alpha(x)$

Soient $x \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$\alpha(\lambda x) = \|\lambda x\|_\infty + 2\|\lambda x\|_1 = |\lambda| \cdot \|x\|_\infty + 2|\lambda| \cdot \|x\|_1$ (car $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont des normes)

$= |\lambda| [\|x\|_\infty + 2\|x\|_1] = |\lambda| \cdot \alpha(x)$

iii) Montrons que $\forall x, y \in \mathbb{R}^2 ; \alpha(x+y) \leq \alpha(x) + \alpha(y)$

Soient $x, y \in \mathbb{R}^2$, alors

$\alpha(x+y) = \|x+y\|_\infty + 2\|x+y\|_1$

mais $\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ (*) (car $\|\cdot\|_\infty$ est une norme)

et $\|x+y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$ (car $\|\cdot\|_1$ est une norme)

$\rightarrow 2\|x+y\|_1 \leq 2\|x\|_1 + 2\|y\|_1$ (**)

On fait la somme de (*) et (**) on trouve :

$$\|x+y\|_\infty + 2\|x+y\|_1 \leq (\|x\|_\infty + 2\|x\|_1) + (\|y\|_\infty + 2\|y\|_1)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha(x+y) \leq \alpha(x) + \alpha(y).$$

On conclure alors que α est une norme.

Exo 3. (8.1)

Soient E un $\mathbb{K}$-evn ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

① Montrer que $\forall x, y \in E$, on a : $\|x-y\| \geq \big|\|x\| - \|y\|\big|$:

On sait que $\|x\| = \|(x-y)+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$

$$\Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\| \quad \text{---} \ (*)$$

aussi $\|y\| = \|(y-x)+x\| \leq \|y-x\| + \|x\|$

$$\Rightarrow \quad \|y\| \leq \|x-y\| + \|x\|$$

$$\Rightarrow \quad \|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|$$

$$\Rightarrow \quad -\|x-y\| \leq \|x\| - \|y\| \quad \text{---} \ (**)$$

de $(*)$ et $(**)$: $\quad -\|x-y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$

$$\Rightarrow \quad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|.$$

② En déduire que $f : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \|x\| \end{array}$ est continue :

---

f est continue en $x_0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|x-x_0\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_{\mathbb{R}} < \varepsilon$

c.à.d : f est continue $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 ; \|x - x_0\| < \delta \underset{(**)}{\Rightarrow} \big|\|x\| - \|x_0\|\big| < \varepsilon$

mais d'après la question ① on a : $\big|\|x\| - \|x_0\|\big| \leq \|x - x_0\|$ — $(*)$

Alors dans $(**)$ si on prend $\delta = \varepsilon$, la définition est vérifiée
donc de $(*)$ on aura : $\|x - x_0\| < \varepsilon \Rightarrow \big|\|x\| - \|x_0\|\big| < \varepsilon$

et donc f est continue en x_0 quelconque de E

on conclure que f est continue sur E

Exo 4 (8.2)

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v.n et $\lambda \in \mathbb{K}$

Montrons que chacune des applications suivantes est continue :

$$f : E^2 \longrightarrow E \qquad\qquad g : E \longrightarrow E$$
$$(x,y) \longmapsto x+y \qquad\qquad x \longmapsto \lambda x$$

① Montrons que f est continue

f est continue $\Leftrightarrow \exists M > 0, \forall (x,y) \in E^2 : \|f(x,y)\|_E \leq M \|(x,y)\|_{E^2}$

càd f continue $\Leftrightarrow \exists M > 0, \forall (x,y) \in E^2 : \|x+y\|_E \leq M \cdot \|(x,y)\|_{E^2}$

On a : $\|x+y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$ — $(*)$

et on a aussi $\|(x,y)\|_{E^2} = \|x\|_E + \|y\|_E$ — $(**)$

De $(**)$ et $(*)$ on trouve : $\|x+y\|_E \leq \|(x,y)\|_{E^2}$

$\Rightarrow \|x+y\|_E \leq 1 \cdot \|(x,y)\|_{E^2}$

donc $\exists M = 1 > 0 ; \forall (x,y) \in E^2 : \|x+y\|_E \leq M \cdot \|(x,y)\|_{E^2}$

$\Rightarrow f$ est continue

② De même façon on montre que g est continue.

g continue $\Leftrightarrow \exists M > 0, \forall x \in E : \|g(x)\|_E \leq M \cdot \|x\|_E$

càd g continue $\Leftrightarrow \exists M > 0, \forall x \in E : \|\lambda x\|_E \leq M \cdot \|x\|_E$

On sait que $\|\lambda x\|_E = |\lambda| \|x\|_E$

$\Rightarrow \forall x \in E : \|\lambda x\|_E \leq |\lambda| \cdot \|x\|_E$

$\forall x \in E : \|g(x)\|_E \leq |\lambda| \cdot \|x\|_E$

donc $\exists M = |\lambda|, \forall x \in E : \|g(x)\|_E \leq M \cdot \|x\|_E$

$\Rightarrow g$ est continue (d'après la définition ci-dessus).